

Le chaos dans les systèmes dynamiques.

ODEN Jérémy

5 juillet 2007

Table des matières

1	Présentation	2
1.1	L'histoire du chaos déterministe	2
1.2	Objectifs de ce T.I.P.E.	3
2	Vers une meilleure compréhension du chaos déterministe	4
2.1	L'espace des phases	4
2.1.1	Un exemple	4
2.1.2	L'attracteur chaotique	5
2.2	Les systèmes dissipatifs	5
2.2.1	Étude au voisinage d'un point d'équilibre	5
2.2.2	Les systèmes entretenus	7
2.3	Les sections de Poincaré	7
2.3.1	Exemples de sections de Poincaré	8
2.3.2	L'application logistique	9
3	Le chaos dans les oscillateurs	11
3.1	Les oscillateurs	11
3.1.1	Le critère d'oscillation de Barkhausen	11
3.1.2	L'oscillateur de Colpitts	12
3.2	Utilisation du diagramme de bifurcation	13
3.2.1	diagramme de bifurcation	13
3.2.2	Comportement chaotique	14
4	La synchronisation de systèmes chaotiques	16
4.1	Principe de la synchronisation	16
4.1.1	Synchroniser deux systèmes identiques	16
4.1.2	Synchronisation par injection de courant	17
4.2	Le chaos et la transmission de données	19
4.2.1	Une méthode basée sur l'injection de courant	19
4.2.2	Conclusion	20
A	Programme utilisé pour le diagramme de bifurcation	24

Chapitre 1

Présentation

1.1 L'histoire du chaos déterministe

En 1963 le météorologue Edward Lorenz expérimentait une méthode lui permettant de prévoir les phénomènes météorologiques. C'est par pur hasard qu'il observa qu'une modification minimale des données initiales pouvait changer de manière considérable ses résultats. Lorenz venait de découvrir le phénomène de *sensibilité aux conditions initiales*. Les systèmes répondant à cette propriété seront à partir de 1975 dénommés : systèmes chaotiques. C'est donc au cours des années soixante dix que la théorie du chaos a pris son essor.

Cependant, les travaux de certains scientifiques menés bien avant cette découverte vont être très utiles à la compréhension de la dynamique chaotique. En effet, vers la fin du XIX^e siècle le mathématicien, physicien et philosophe français Henri Poincaré avait déjà mis en évidence le phénomène de sensibilité aux conditions initiales lors de l'étude astronomique du problème des trois corps. On trouve dans le *Calcul des Probabilités* de Henri Poincaré l'affirmation suivante :

« Une cause très petite, qui nous échappe, détermine un effet considérable que nous ne pouvons pas ne pas voir, et alors nous disons que cet effet est dû au hasard. Si nous connaissions exactement les lois de la nature et la situation de l'univers à l'instant initial, nous pourrions prédire exactement la situation de ce même univers à un instant ultérieur. Mais, lors même que les lois naturelles n'auraient plus de secret pour nous, nous ne pourrions connaître la situation qu'approximativement. Si cela nous permet de prévoir la situation ultérieure avec la même approximation, c'est tout ce qu'il nous faut, nous disons que le phénomène a été prévu, qu'il est régi par des lois ; mais il n'en est pas toujours ainsi, il peut arriver que de petites différences dans les conditions initiales en engendrent de très grandes dans les phénomènes finaux ; une petite erreur sur les premières produirait une erreur énorme sur les derniers. La prédiction devient impossible et nous avons le phénomène fortuit. »

Cette citation définit parfaitement le chaos en tant que sensibilité aux conditions initiales mais aussi *le déterminisme* qui réside dans le fait que si une condition initiale est parfaitement déterminée alors l'évolution du système l'est aussi. Le déterminisme traduit l'unicité de la solution pour l'équation différentielle d'un système donné, c'est le théorème de Cauchy.

Toujours au XIX^e siècle, le mathématicien russe Alexandre Lyapunov effectue des recherches sur la stabilité du mouvement. Il introduit l'idée de mesurer l'écart entre deux trajectoires ayant des conditions initiales voisines, lorsque cet écart évolue exponentiellement on parle de sensibilité aux conditions initiales. Les travaux de Lyapunov, d'abord tombés dans l'oubli, seront plus tard très précieux pour étudier certains aspects de la théorie du chaos.

Les travaux des prédécesseurs de Lorenz ont donc été très importants pour la compréhension du chaos déterministe, mais il faut souligner que ce qui va permettre aux scientifiques une compréhension plus accrue des systèmes chaotiques c'est l'ordinateur. En effet, les équations différentielles régissant un système chaotique sont nécessairement non linéaires et, sans ordinateur, leur résolution est en général impossible.

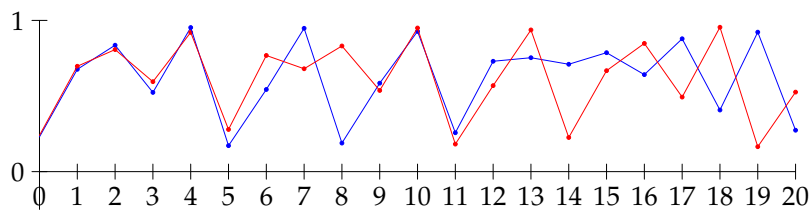


FIG. 1.1 – Exemple de suite à comportement chaotique : $u_{n+1} = 3.82u_n(1 - u_n)$, pour deux conditions initiales différentes de 10^{-2} , l'erreur augmente de façon exponentielle durant les huit premières itérations.

1.2 Objectifs de ce T.I.P.E.

L'enjeu de ce travail est d'exposer les différentes techniques permettant d'étudier la dynamique chaotique puis d'exploiter une application particulière : la synchronisation. La synchronisation peut être utilisée afin de transmettre des données, le principe est le même que celui d'un modem mais on verra que certaines propriétés des systèmes chaotiques sont très intéressantes, pour crypter les données par exemple.

Dans un premier temps nous étudierons donc les différentes méthodes d'analyse de systèmes chaotiques.

Chapitre 2

Vers une meilleure compréhension du chaos déterministe

2.1 L'espace des phases

La *sensibilité aux conditions initiales* est le problème majeur du chaos, elle empêche toute prédiction sur l'évolution du système au delà d'un certain temps. Une erreur $\epsilon_0 > 0$ sur la condition initiale va évoluer exponentiellement et l'erreur, à un instant t , aura l'expression suivante : $|\epsilon(t)| = \epsilon_0 e^{\lambda t}$. On peut calculer la valeur de λ , appelé *exposant de Lyapunov*, grâce aux méthodes développées par Alexandre Lyapunov.

Une façon de contourner ce problème est d'éliminer le temps entre les équations. C'est le rôle de l'*espace des phases* (ou espace des états), il s'agit d'un espace de dimension 2 ou 3 dans lequel chaque coordonnée est une variable d'état du système considéré.

2.1.1 Un exemple

Le pendule libre n'est pas chaotique et cependant l'équation différentielle vérifiée par l'angle que fait la tige du pendule avec la normale est non linéaire. *Un système non linéaire n'est donc pas forcément chaotique alors que la réciproque est toujours vraie.* Le problème du pendule simple est très souvent résolu pour de petits angles en posant $\sin(\theta) \sim \theta$ dans son équation : $\ddot{\theta} + 2\alpha\dot{\theta} + \omega_0^2 \sin(\theta) = 0$.

Dans le portrait de phase du pendule la vitesse angulaire est uniquement fonction de la position. Afin d'obtenir une équation du premier ordre, on pose : $x = \theta$ et $y = \dot{\theta}$, l'équation devient un système que l'on peut résoudre numériquement. Le système obtenu s'écrit aussi de façon vectorielle :

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ -\omega_0^2 \sin(x) - 2\alpha y \end{pmatrix} \iff \dot{\mathbf{X}} = \mathbf{F}(\mathbf{X}) \text{ avec } \mathbf{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}. \quad (2.1)$$

À partir des différents portraits de phase du pendule (fig. 2.2) certaines propriétés peuvent être dégagées :

- Dans l'espace des phases une sinusoïde est représentée par une ellipse (ou un cercle).
- Une grandeur périodique y est représentée par une courbe fermée.
- Si le système est dissipatif, la trajectoire est *attirée* par le point de repos (angle nul et vitesse angulaire nulle).

Par cette méthode on peut vérifier que l'approximation faite sur l'angle θ est bien justifiée puisque pour de petits angles on obtient bien (pour le pendule conservatif) approximativement les mêmes ellipses. Toutefois, ce qui se passe au voisinage du point de repos mérite d'être approfondi.

2.1.2 L'attracteur chaotique

Afin de bien rendre compte de ce qui peut être observé dans un espace des phases à trois dimensions, voici la représentation de l'attracteur de Rössler. Il s'agit d'un *attracteur chaotique* (ou attracteur étrange), c'est-à-dire que cette figure géométrique est la représentation dans l'espace des phases d'un système chaotique.

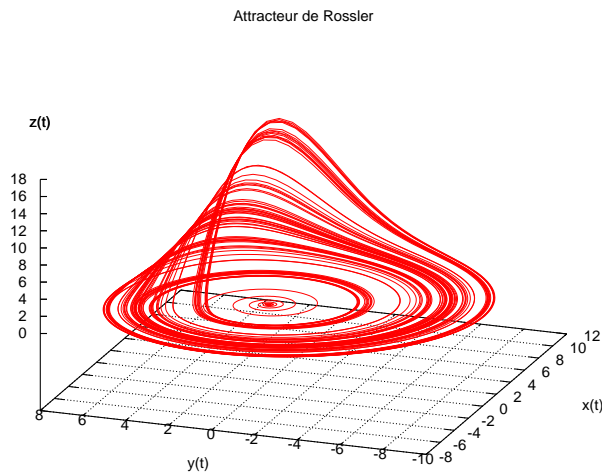


FIG. 2.1 – Attracteur chaotique de Rössler.

Les équations du système de Rössler sont données par le système différentiel suivant (avec pour la figure 2.1 : $a = b = 0.2$ et $c = 5$) :

$$\begin{cases} \dot{x} = -(y + z) \\ \dot{y} = x + ay \\ \dot{z} = b - cz + xz. \end{cases}$$

L'objet géométrique observé (fig. 2.1) est relativement complexe et dégage la richesse d'informations que contient le système de Rössler. Un attracteur chaotique possède notamment la propriété remarquable suivante : *la trajectoire ne repasse jamais par un même état*. Ce qui signifie, entre autres, que cette trajectoire passe par une infinité d'états.

2.2 Les systèmes dissipatifs

L'exemple du pendule dans le cas dissipatif (fig. 2.2) nous montre que, dans l'espace des phases, la trajectoire est *attirée* vers le point de repos. Étudier ce qui se passe au voisinage de ce point pourrait se révéler être très instructif.

2.2.1 Étude au voisinage d'un point d'équilibre

On a pu constater que le pendule obéissait à une équation de la forme $\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{F}(\mathbf{X})$ (équation (2.1), page 4), ceci nous permet d'effectuer un développement limité du premier ordre au voisinage du point d'équilibre. À l'aide de la matrice Jacobienne J_F de \mathbf{F} et du vecteur \mathbf{X}_0 dont les coordonnées sont celles du point d'équilibre, nous pouvons donner une approximation de l'évolution du système lorsqu'il est soumis à une perturbation $\delta\mathbf{X}$:

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}_0 + \delta\mathbf{X}) = \mathbf{F}(\mathbf{X}_0) + J_F(\mathbf{X}_0) \cdot \delta\mathbf{X} + o(\delta\mathbf{X}). \quad (2.2)$$

Dans le cas du pendule : \mathbf{X}_0 est le vecteur nul et $\mathbf{F}(0) = 0$ donc, étant donné que

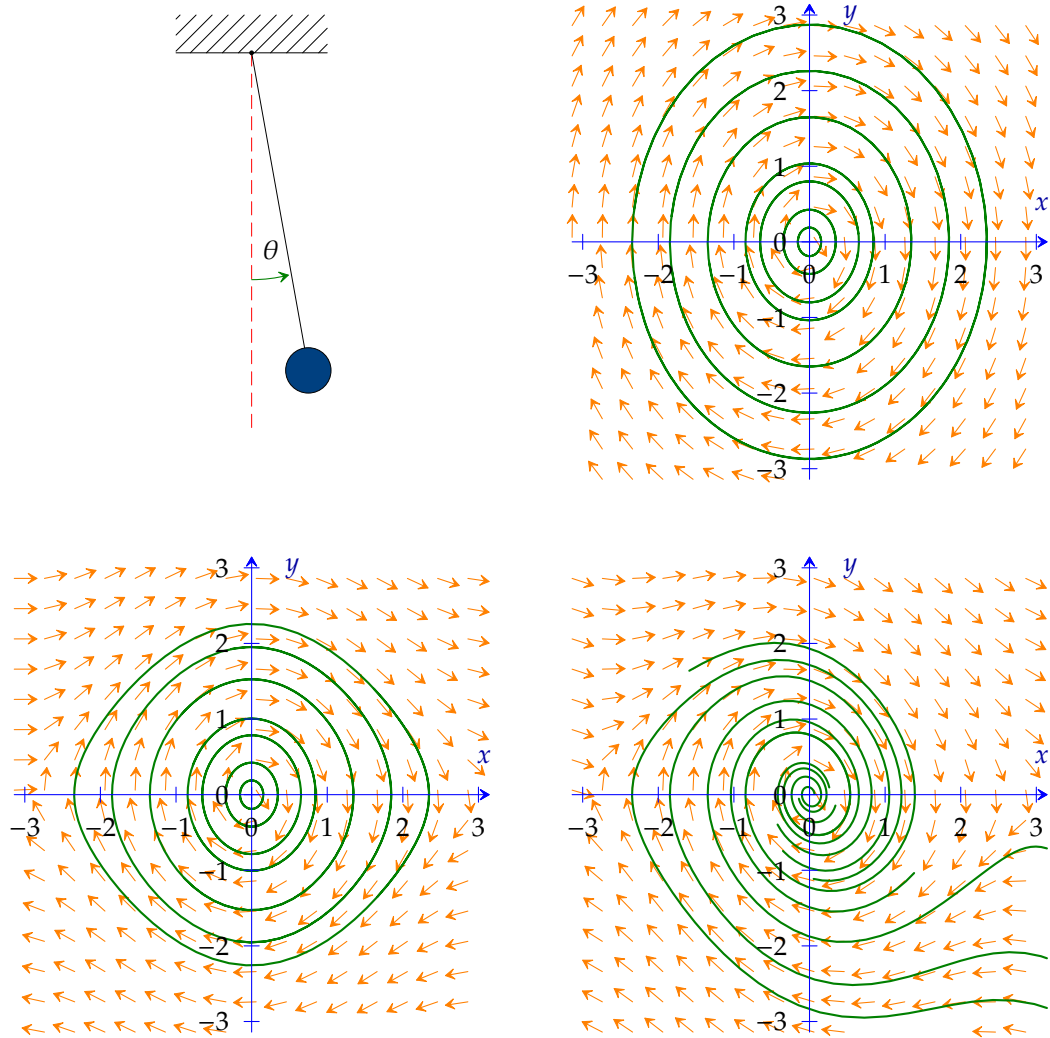


FIG. 2.2 – Les différents portraits de phase du pendule avec, de gauche à droite et de haut en bas : le schéma du pendule avec son angle θ , le portrait de phase pour le pendule conservatif avec l'approximation $\sin(\theta) \sim \theta$, le même sans l'approximation, et enfin, le portrait de phase sans approximation du pendule dissipatif.

$$J_F(0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & -2\alpha \end{pmatrix}, \text{ on trouve, en prenant } \delta\mathbf{X} = \begin{pmatrix} \delta x \\ \delta y \end{pmatrix} :$$

$$\mathbf{F}\left(\begin{pmatrix} \delta x \\ \delta y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \delta \dot{x} \\ \delta \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & -2\alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \delta x \\ \delta y \end{pmatrix} + o\left(\begin{pmatrix} \delta x \\ \delta y \end{pmatrix}\right). \quad (2.3)$$

Avant de poursuivre, c'est-à-dire de diagonaliser la matrice Jacobienne, une remarque s'impose. La trace de la matrice Jacobienne est dans le cas général : $\text{Tr}(J_F) = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y}$ (ou $\text{Tr}(J_F) = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$ en dimension 3); la valeur de la trace de J_F est donc en fait la divergence de \mathbf{F} :

$$\text{div}\mathbf{F} = \text{Tr}(J_F). \quad (2.4)$$

Dans le cas du pendule : $\text{div}\mathbf{F} = \text{Tr}(J_F(0)) = -2\alpha$, la divergence est négative, cela traduit la dissipation de l'énergie qui fait que la trajectoire tend vers le point de repos.

Cette parenthèse étant terminée, venons en à la diagonalisation de J_F . Si J_F est diagonalisable alors, on considère une base de vecteurs propres \vec{u}_1, \vec{u}_2 avec λ_1, λ_2 les valeurs propres associées et :

$$\delta\mathbf{X}(t) = \mu_1 e^{\lambda_1 t} \vec{u}_1 + \mu_2 e^{\lambda_2 t} \vec{u}_2.$$

Remarque : λ_1 et λ_2 peuvent être complexes conjuguées.

Puisque les valeurs propres peuvent être complexes conjuguées, on distingue les trois cas suivants :

- Une des valeurs propres est à partie réelle positive : la trajectoire s'éloigne exponentiellement du point d'équilibre.
- Les deux valeurs propres sont à partie réelle négative : la trajectoire converge vers le point de repos.
- Si l'une (ou les deux) des valeurs propres est nulle : une des composantes de l'erreur δX (ou les deux) reste constante.

Les valeurs propres évoquées sont appelées *exposants de Lyapunov*.

2.2.2 Les systèmes entretenus

Pour construire une horloge il faut palier au problème de la perte d'énergie du pendule en concevant un dispositif qui pourrait entretenir les oscillations. On ne s'intéresse pas ici à la manière dont est réalisé ce dispositif mais plutôt à ses effets. Nous étudions donc un pendule forcé de manière sinusoïdale dont l'équation est :

$$\ddot{\theta} + 2\alpha\dot{\theta} + \omega_0^2 \sin(\theta) = \gamma\omega_0^2 \cos(\omega t). \quad (2.5)$$

La matrice Jacobienne du système n'a pas changé, le système est toujours dissipatif, il est attiré par le point de repos. Cependant, expérimentalement le pendule ne s'arrête jamais d'osciller, il n'atteint jamais le point de repos.

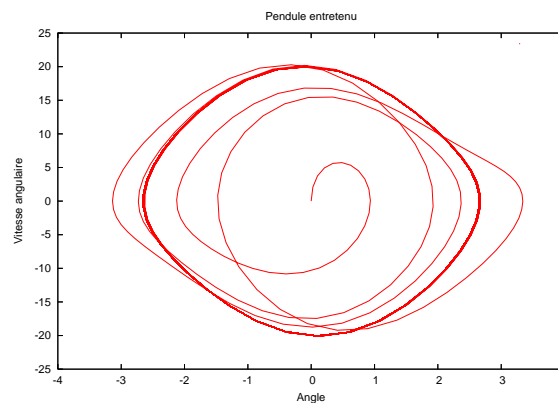


FIG. 2.3 – Portrait de phase du pendule forcé pour : $\omega_0 = 3\pi$, $\omega = 2\pi$, $\alpha = \omega_0/4$.

On observe (fig. 2.3) que, partant du point de repos, la trajectoire finit par se stabiliser sur une courbe fermée, on a alors un signal périodique en sortie de l'oscillateur. Cette convergence de la trajectoire vers une courbe fermée, similaire au second cas de la figure 2.2, est appelée *cycle limite*. Il faut en fait regarder ce qui se passe sur un temps infini pour observer la courbe fermée, d'où la notion de limite.

2.3 Les sections de Poincaré

Nous l'avons déjà vu lors de l'introduction, Henri Poincaré a apporté une contribution très utile pour l'étude des systèmes chaotiques. Parmi ces contributions on trouve les *sections de Poincaré*. Faire une section de Poincaré revient à couper la trajectoire dans l'espace des phases, afin d'étudier les intersections de cette trajectoire avec, par exemple en dimension trois, un plan. On passe alors d'un système dynamique à temps continu à un système dynamique à temps discret. Les mathématiciens ont bien sûr démontré que les propriétés du système sont conservées après la réalisation d'une section de Poincaré judicieusement choisie. Dans un premier temps nous allons voir quelles sont les différentes sections de Poincaré utilisées en général.

2.3.1 Exemples de sections de Poincaré

La section de Poincaré la plus naïve est de couper la trajectoire dans l'espace des phases par un plan (en dimension trois) ou par une droite (en dimension deux).

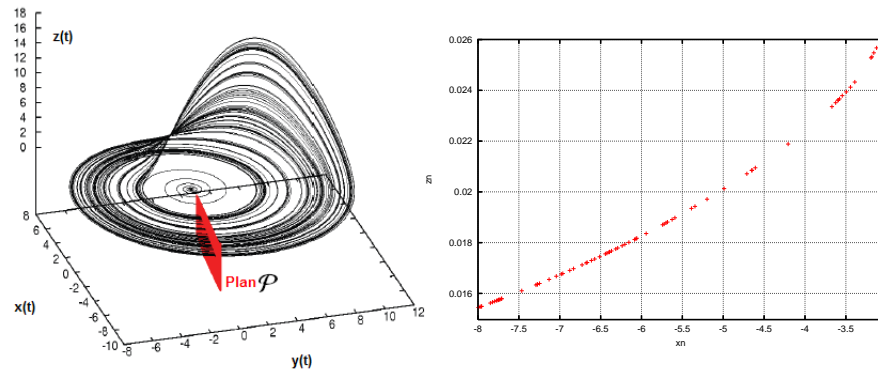


FIG. 2.4 – Intersections de la trajectoire de l'attracteur de Rössler avec un plan \mathcal{P} d'équation $y = 0$ ($x \leq 0$).

Sur la figure 2.4, on voit clairement que si on observe l'intersection de la trajectoire du système Rössler avec le plan \mathcal{P} il faut alors étudier les deux suites $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$. On peut se restreindre à l'étude de la suite $(-x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ l'opposée de la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ car toutes les valeurs de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont négatives. La figure 2.5 montre que l'évolution de la suite $(-x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est clairement chaotique. Pourtant, on observe que la caractéristique $-x_{n+1} = f(-x_n)$ semble dégager une certaine régularité, on dirait en effet que cette caractéristique est assimilable à une parabole. Ou du moins, la fonction qui a x_n associe x_{n+1} semble pouvoir être approximée par une fonction polynomiale, ce qui peut quand même paraître étonnant étant donné le comportement de la suite $(-x_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Nous voyons que cette section de Poincaré conserve les propriétés du système d'origine :

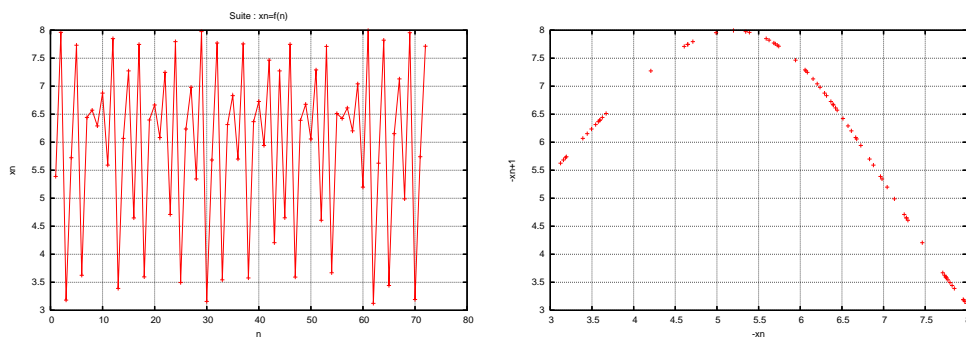


FIG. 2.5 – La suite $(-x_n)_{n \in \mathbb{N}}$: à gauche $-x_n = f(n)$ et à droite $-x_{n+1} = f(-x_n)$.

la suite $(-x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est effectivement chaotique.

Une autre façon de réaliser une section de Poincaré, toute aussi intéressante, consiste à regarder la suite des maximums de l'une des grandeurs du système (surface d'équation $\dot{x} = 0$). Prenons par exemple la grandeur $y(t)$ du système de Rössler et observons la suite des maximums successifs de cette grandeur, notée U_n . La figure 2.6 montre la caractéristique $U_{n+1} = f(U_n)$, celle-ci a les mêmes propriétés que la caractéristique donnée en figure 2.5 (à droite). Cependant, la courbe n'est pas exactement la même, il faut chercher leurs similitudes au delà de leurs apparences, le calcul de leur *penne moyenne* (moyenne géométrique) nous montrerait que ces deux fonctions ont la même penne moyenne. C'est parce que la valeur de la penne moyenne de ces fonctions est liée à l'exposant de Lyapunov de la grandeur $y(t)$.

Les deux techniques que nous venons d'exposer sont surtout valables pour des systèmes autonomes, c'est-à-dire des systèmes qui ne sont pas forcés. Qu'en est-il pour le pendule forcé par exemple? Et bien

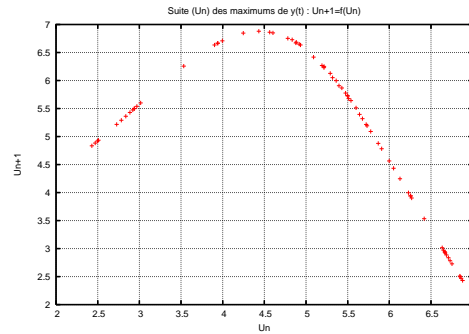


FIG. 2.6 – La suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ des maximums de la grandeur $y(t)$ du système de Rössler. Cette figure montre la caractéristique $U_{n+1} = f(U_n)$.

pour les systèmes entretenus, et en particulier pour le pendule, on étudie l’une des grandeurs du système, par exemple $\theta(t)$ pour le pendule, et l’on regarde les valeurs de cette grandeur à des temps multiples de la période T_e d’excitation (phase constante). Pour le pendule, on étudie les valeurs prises par la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $u_n = \theta(nT_e)$.

Pour l’instant l’intérêt des sections de Poincaré n’est pas évident, cependant il est énorme. Nous allons donc à travers un exemple étudier l’une des utilisations des sections de Poincaré.

2.3.2 L’application logistique

Une figure (fig. 1.1, page 3) a déjà été consacrée à la suite logistique pour montrer que celle-ci admet un comportement chaotique. La suite définie par $x_{n+1} = 3.82x_n(1 - x_n)$ admet un comportement chaotique et pourtant la suite définie par $x_{n+1} = x_n(1 - x_n)$ est clairement convergente car minorée par 0 et décroissante (car $x_{n+1} - x_n = -x_n^2 \leq 0$). Cette conséquence nous amène à définir l’application logistique de la manière suivante :

$$f_r : \begin{cases} [0; 1] & \rightarrow [0; 1] \\ x_n & \mapsto f_r(x_n) = x_{n+1} = rx_n(1 - x_n) \end{cases} \quad (2.6)$$

L’application logistique dépend d’un paramètre r et pour que f_r soit bien de $[0; 1]$ dans lui-même, on choisit : $r \in [0; 4]$. On peut parfaitement imaginer que l’application logistique soit le résultat d’une section de Poincaré faite sur un attracteur chaotique comme celui de Rössler, il suffit de constater que les deux courbes s’apparentent effectivement à des paraboles. On peut même concevoir que les paramètres c (ou a ou b) du système de Rössler et le paramètre r de l’application logistique sont liés.

Observons l’effet que peut avoir la modification du paramètre c du système de Rössler sur la structure de son attracteur. La figure 2.7 montre bien que pour certaines valeurs de c le système de Rössler n’a pas un comportement chaotique.

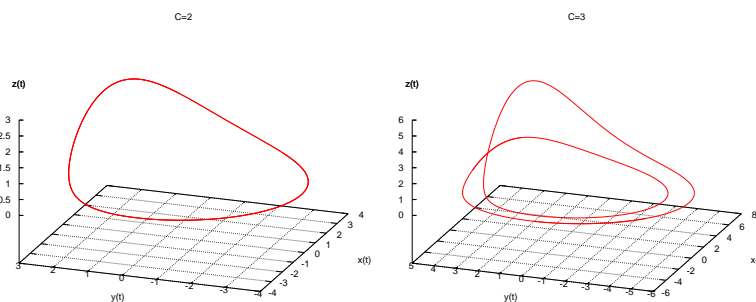


FIG. 2.7 – Allure de l’attracteur de Rössler pour deux valeurs différentes du paramètre c , le régime transitoire a été supprimé.

Dans le cas où $c = 2$, la trajectoire est une courbe fermée, ce qui signifie que les grandeurs de sortie du système de Rössler sont périodiques. On dit alors que l'on se trouve sur *une orbite périodique*. Pour le second cas, il s'agit toujours d'une orbite périodique, seulement, la période est deux fois plus longue, il y a eu un *doublement de période*. Pour la suite logistique le comportement est similaire, pour $r = 3.2$ la suite est périodique ($x_{n+2} = x_n$) et pour $r = 3.5$ la période a doublé ($x_{n+4} = x_n$).

Afin de déterminer avec précision les différents comportements possibles de la suite logistique en fonction du paramètre r on construit un *diagramme de bifurcation*. Après un certain nombre d'itérations de la suite pour une certaine valeur de r on place les points correspondants aux p itérations suivantes en abscisses, l'opération est renouvelée pour plusieurs valeurs de r allant de 2.5 à 4. On obtient le diagramme de bifurcation, qui est aussi appelé *diagramme de Feigenbaum* (fig. 2.8).

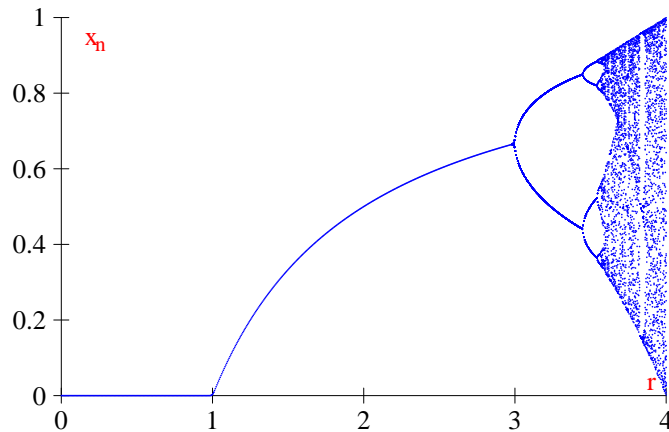


FIG. 2.8 – Diagramme de bifurcation de la suite logistique.

Ce diagramme permet de connaître tous les comportements de la suite logistique en fonction de r . En particulier, pour $r = 3$ on observe un doublement de période appelé ici *bifurcation*. Avant de basculer dans le chaos il y a une cascade de doublements de période. Après un doublement de période l'orbite périodique précédente est toujours présente mais instable, ce qui explique qu'elle n'est pas visible sur le diagramme de bifurcation, un système chaotique a donc *une infinité d'orbites périodiques*.

Chapitre 3

Le chaos dans les oscillateurs

3.1 Les oscillateurs

Tout système oscillant est composé d'un élément passif qui dissipe de l'énergie : le résonateur, et d'un élément actif qui apporte de l'énergie : l'amplificateur. Dans le cas d'un oscillateur électronique le résonateur est en général un filtre et l'amplificateur est souvent un amplificateur opérationnel ou bien un transistor.

3.1.1 Le critère d'oscillation de Barkhausen

La figure 3.1 montre la représentation la plus élémentaire d'un oscillateur électronique, l'élément A est un amplificateur et l'élément R est un filtre.

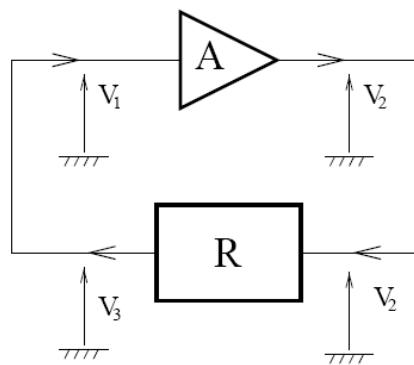


FIG. 3.1 – Oscillateur électronique : modèle de Barkhausen.

Supposons que les différentes grandeurs du montage soient sinusoïdales c'est-à-dire : $V_2 = |A|.e^{j\phi_A}V_1$ et $V_3 = |R|.e^{j\phi_R}V_2$ et donc : $V_3 = |A|.|R|.e^{j(\phi_A+\phi_R)}$. Le critère de Barkhausen impose que V_3 soit l'unité, ce qui nécessite deux conditions :

$$\begin{cases} |A|.|R| = 1 \\ \phi_A + \phi_R = 0 + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases} \quad (3.1)$$

Cependant, dans la pratique, les oscillations prennent naissance à partir de fluctuations qui sont amplifiées, ce qui nécessite un gain plus grand que l'unité. Mais les oscillations ne peuvent croître indéfiniment, elles s'arrêtent sur une *non-linéarité* de l'amplificateur. Cela signifie que dans un oscillateur, l'amplificateur possède toujours une caractéristique non linéaire. Une conséquence directe est que tout oscillateur électronique est potentiellement chaotique, en effet, tout système chaotique est nécessairement non linéaire.

3.1.2 L'oscillateur de Colpitts

Simulation et réalisation du circuit

On s'intéresse ici à un oscillateur particulier : l'oscillateur de Colpitts. Le schéma de principe de cet oscillateur est donné par la figure 3.2.

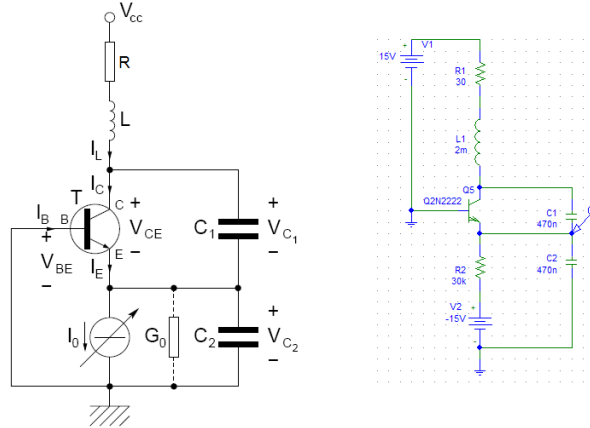


FIG. 3.2 – Oscillateur de Colpitts, à gauche : le schéma de principe et à droite : le circuit réalisé pour la simulation.

Si on applique le critère de barkhausen à cet oscillateur, on lui trouve une fréquence de résonance : $f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{C_1+C_2}{LC_1C_2}}$, ceci en négligeant la résistance R qui est en série avec la bobine. Remarque : la conductance G0 sera négligée dans tout ce qui suit.

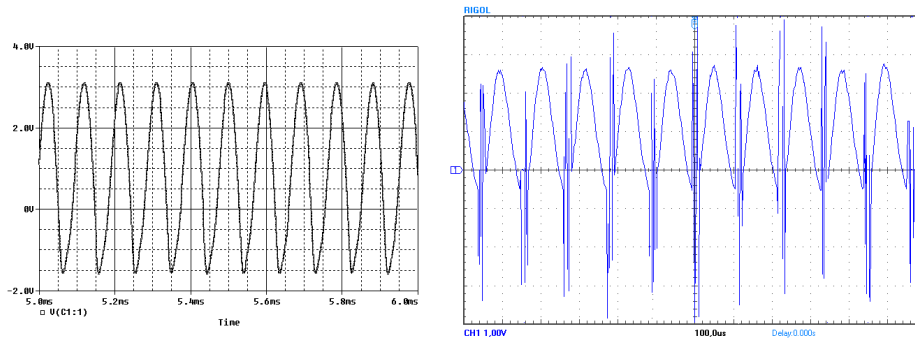


FIG. 3.3 – Pour R2 = 120Ω : résultat de la simulation du circuit, f0 = 10.5kHz (à gauche) et les résultats de l'expérience, f0 ≈ 11kHz (à droite).

La simulation est d'abord effectuée pour les valeurs de composants mentionnées sur la figure 3.2 ce qui donne une fréquence de 7.3 kHz en théorie. Or, selon la valeur de R2 on observe que la fréquence est plus ou moins différente de cette valeur théorique. Les résultats obtenus sont répertoriés dans le tableau qui suit.

R2 [Ω]	Fréquence[kHz]
30k	7.33
20k	7.3
12k	7.26
300	8.18
200	8.97
120	10.5

Plus la valeur de R_2 est faible plus on s'éloigne de la fréquence théorique. Ceci vient du fait que la fréquence de résonance de l'oscillateur dépend en fait de la non-linéarité. On a l'impression que la valeur de R_2 , c'est-à-dire que la valeur du courant I_0 joue un rôle important vis-à-vis du comportement de l'oscillateur.

Mise en équation du circuit

Le circuit se met en équation en utilisant la loi des mailles et la loi des nœuds afin d'obtenir le système suivant :

$$\begin{cases} C_1 \frac{dV_{C_1}}{dt} = -\alpha \cdot n(V_{C_2}) + I_L \\ C_2 \frac{dV_{C_2}}{dt} = \frac{n(V_{C_2})}{\beta} + I_L - I_0 \\ L \frac{dI_L}{dt} = -V_{C_2} - V_{C_1} - RI_L + V_{CC} \end{cases}$$

$$\text{avec } n(V_{C_2}) = I_s \left(e^{\frac{-V_{C_2}}{V_s}} - 1 \right).$$

α et β sont des paramètres du transistor et $\alpha = \frac{\beta}{\beta+1}$.

Pour la suite, on préférera étudier le système normalisé suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{g}{Q \cdot (1-k)} [-\alpha \cdot n(y) + z] \\ \dot{y} = \frac{g}{Qk} \left[\frac{n(y)}{\beta} + z \right] \\ \dot{z} = -\frac{Qk(1-k)}{g} [y + x] - \frac{1}{Q}z \end{cases}$$

avec :

$$\begin{aligned} n(y) &= e^{-y} - 1 \\ k &= \frac{C_2}{C_1 + C_2} \\ Q &= \frac{\omega_0 L}{R} \\ g &= \frac{I_0 L}{V_s R (C_1 + C_2)} = p \cdot I_0 \end{aligned}$$

Avec ce système le temps de référence est $1/\omega_0$, la tension de référence est V_s ($V_s \approx 26mV$ à $25^\circ C$) et le courant de référence est I_0 . Le fait d'avoir un courant de référence qui n'est autre que I_0 est très pratique pour tous les calculs que l'on va mener. En effet, I_0 sera le *paramètre de contrôle* du système, c'est-à-dire que la variable $g = p \cdot I_0$ sera en abscisses du diagramme de bifurcation.

Remarque importante : à partir de maintenant on utilise les valeurs suivantes : $R = 56.5\Omega$, $L = 5mH$, $C_1 = C_2 = 1\mu F$, $\beta \approx 250$ (le transistor est un 2N2222). Ce qui donne : $k = 1/2$, $Q \approx 1.77$, $\omega_0 = 20000s^{-1}$ et $g = p \cdot I_0 = 1,7 \cdot 10^3 \cdot I_0$.

3.2 Utilisation du diagramme de bifurcation

À ce stade nous souhaitons réaliser le diagramme de bifurcation du circuit de Colpitts en utilisant le système d'équations différentielles normalisé. Faire le diagramme de bifurcation du circuit de Colpitts n'est pas très difficile, il suffit de résoudre numériquement les équations (avec un pas d'intégration suffisamment petit), de faire une section de Poincaré pour une valeur fixée de g puis de recommencer avec diverses valeurs de g .

3.2.1 diagramme de bifurcation

On choisit la section de Poincaré qui opère sur les maximums de l'une des variables du système. La seule difficulté pour réaliser le diagramme de bifurcation est de trouver un intervalle de variations pour g .

En effet, on ne peut pas savoir à l'avance à partir de quelle valeur de g va se produire le premier doublement de période, et encore moins quand on va basculer dans le chaos.

Le seul indice dont nous disposons est que le système s'écrit sous la forme $\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{F}(\mathbf{X})$, tout comme le pendule, nous pouvons donc utiliser l'équation (2.2) (page 5) pour savoir à partir de quelle valeur de g le système va osciller. Il faut déterminer les valeurs propres de la matrice Jacobienne J_F associée au système (pour simplifier on néglige $1/\beta$ et on pose $\alpha \approx 1$) :

$$J_F(0) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{g}{Q(1-k)} & \frac{g}{Q(1-k)} \\ 0 & 0 & \frac{g}{Qk} \\ -\frac{Qk(1-k)}{g} & -\frac{Qk(1-k)}{g} & -\frac{1}{Q} \end{pmatrix}$$

Notons au passage la valeur de la trace de cette matrice qui permet de trouver : $\text{div}\mathbf{F} = \text{Tr}(J_F(0)) = -\frac{1}{Q} < 0$, le système est dissipatif. Le polynôme caractéristique de cette matrice est : $\det(J_F(0) - \lambda I_3) = \lambda^3 + \frac{1}{Q}\lambda^2 + \lambda + \frac{g}{Q}$. Sachant que lorsque les oscillations prennent naissance leur pulsation est ω_0 , c'est-à-dire une pulsation unitaire dans le cas du système normalisé, on aura deux valeurs propres imaginaires pures de pulsation unitaire : $\lambda_{\pm} = \pm j$. Il ne reste qu'une valeur propre à déterminer, en utilisant l'expression factorisée du polynôme caractéristique on trouve $g = 1$ et la valeur de la troisième valeur propre : $\lambda_R = -\frac{1}{Q}$. Le système va donc quitter son point de repos à partir de $g = 1$. La valeur du paramètre r de l'application logistique était la même (fig. 2.8, 10), on soupçonne que les diagrammes de bifurcations doivent être assez ressemblants. La figure 3.4 montre le diagramme de bifurcation pour $g \in [2; 4]$.

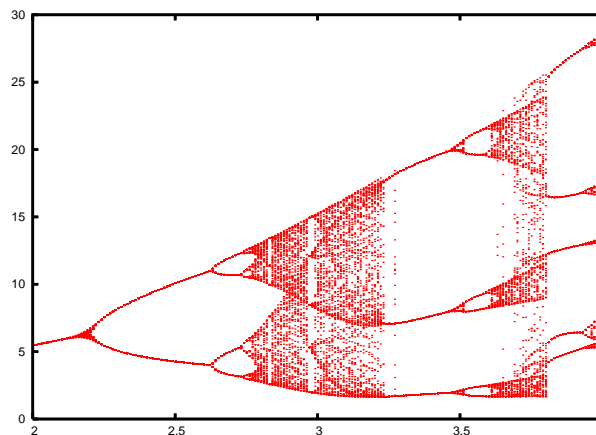


FIG. 3.4 – diagramme de bifurcation du circuit de Colpitts : en abscisses g et en ordonnées les valeurs des maximums de $y(t)$.

Comme pour la suite logistique, la route vers le chaos se fait par une cascade de doublements de période. Amener le circuit dans un régime chaotique ne pose aucune difficulté, il suffit de jouer sur la valeur du courant I_0 . Par exemple, pour $g = 2,8$ le circuit est chaotique et cela correspond à une valeur du courant I_0 de $1,65\text{mA}$.

3.2.2 Comportement chaotique

Afin de contrôler de manière plus précise la valeur du courant I_0 le circuit de la simulation intègre désormais un générateur de courant de Howland à la place de la résistance R_2 et de la source de tension V_2 . La figure 3.5 montre le nouveau circuit utilisé pour la simulation. Avec un courant de $1,7\text{mA}$ qui correspond à $g \approx 2,8$ le circuit est, d'après le diagramme de bifurcation, en régime chaotique. L'allure de la tension V_{C_2} est donnée sur un intervalle de 10ms par la figure 3.6. La figure suivante montre l'un des résultats les plus réussis de la manipulation, pour $I_0 = 1,97\text{mA}$ ($g \approx 3,4$).

Les résultats entre simulation et expérience sont très cohérents, les valeurs calculées du courant I_0 correspondent presque parfaitement avec les valeurs observées en pratique. Une légère différence vient du fait que la valeur du β du transistor n'est sans doute pas exactement de 250. La résistance interne de la bobine

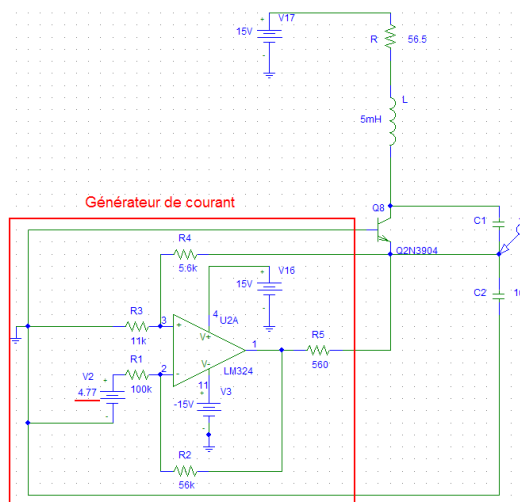


FIG. 3.5 – Circuit de Colpitts avec générateur de courant, $V_2 = 1,7V$ donc $I_0 = 1,7mA$.

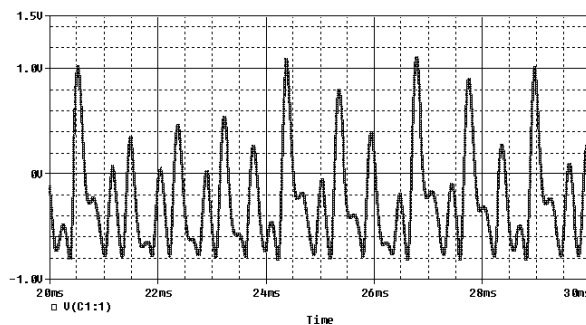


FIG. 3.6 – Tension V_{C_2} du circuit de Colpitts pour $I_0 = 1,7mA$.

joue un rôle tout aussi important, elle a été mesurée à l'ohm-mètre et la résistance R a été choisie de façon à ce que leur somme soit approximativement de $56,5\Omega$. Une dernière remarque est que l'on observe, surtout pour la figure 3.3 (page 12), des fluctuations lorsque la tension V_{C_2} est à son minimum. Une explication de ce phénomène peut être donnée car ce minimum de tension fait que l'on se trouve dans le « coude » de la caractéristique exponentielle de V_{be} en fonction de I_e , la non-linéarité est donc très forte et comme il y a certainement des inductances et des capacités parasites qui sont sensibles à cette non-linéarité, cela entraîne des oscillations.

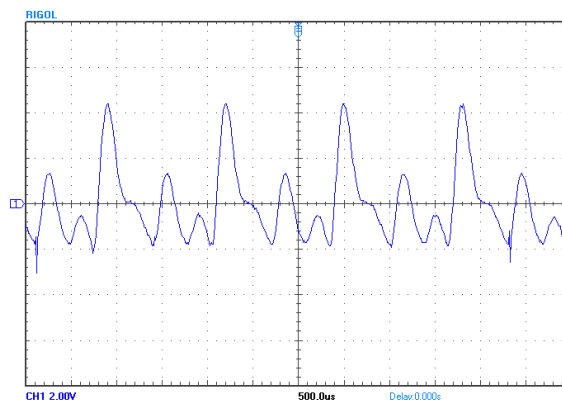


FIG. 3.7 – Circuit de Colpitts : $V_{C_2}(t)$ pour $I_0 = 1,97mA$ ($g \approx 3,4$).

Chapitre 4

La synchronisation de systèmes chaotiques

4.1 Principe de la synchronisation

4.1.1 Synchroniser deux systèmes identiques

Synchroniser deux systèmes linéaires couplés linéairement est impossible. En effet, par principe de superposition toute fréquence présente en sortie du système doit être présente en entrée du système et donc si la synchronisation n'est pas effective à l'instant initial elle ne le sera jamais. Par contre, pour les systèmes non linéaires, la réponse est loin d'être évidente. Pour que deux systèmes chaotiques identiques puissent se synchroniser, il faut que leur attracteur soit le même. Ils doivent donc avoir les mêmes équations, les mêmes paramètres et le même point de repos. L'opération de synchronisation consiste à rapprocher les trajectoires des deux systèmes jusqu'à ce qu'elles finissent par être confondues. Le système global comporte un circuit *émetteur* et un circuit *récepteur* et synchroniser les deux systèmes revient à injecter dans le récepteur une grandeur proportionnelle à la différence des deux trajectoires. De cette façon la trajectoire du récepteur finit par être confondue avec celle de l'émetteur. Ce principe est détaillé par le schéma bloc de la figure 4.1. Cependant, dans la pratique, les valeurs de composants ont des tolérances et ne sont donc pas exactement les mêmes pour deux circuits identiques. Les parasites jouent aussi un rôle très important. Imaginons alors qu'il soit possible de synchroniser deux systèmes identiques. Les parasites sont modélisés par une perturbation ϵ . Considérons que l'émetteur a l'équation $\dot{X} = F(X)$ et le récepteur $\dot{X}^* = F(X^*)$, comme les systèmes sont supposés identiques la fonction F est la même pour chacun d'eux. Étant donné ce qui vient d'être dit, on sait qu'à un moment donné il existe un vecteur ϵ , dont les composantes sont arbitrairement petites, tel que $X^* - X = \epsilon$. On trouve assez facilement, en utilisant l'équation (2.2) (page 5), que : $\dot{\epsilon} = J_F(X)\epsilon + o(\epsilon)$. Il faut donc chercher les valeurs propres de la matrice Jacobienne de F évaluée en X . La démonstration est fastidieuse mais les valeurs propres ont bien toutes leur partie réelle négative (voir fig. 4.4). En théorie on s'attend à ce que ϵ tende vers le vecteur nul lorsque le temps tend vers l'infini. En pratique, on espère simplement que l'erreur soit bornée et de valeur négligeable devant le signal chaotique de l'émetteur.

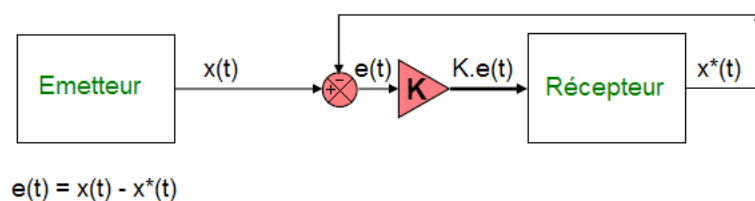


FIG. 4.1 – Schéma bloc illustrant le principe de la synchronisation.

4.1.2 Synchronisation par injection de courant

La méthode de l'injection de courant permet de réaliser la synchronisation entre deux oscillateurs de Colpitts. Le circuit servant de support à la simulation (fig. 4.2) réalise parfaitement cette fonction. En effet, le courant i_{R_c} a pour expression $i_{R_c} = \frac{V_{C_1} - V_{C_3}}{R_c}$, on injecte donc bien un courant proportionnel à $V_{C_1} - V_{C_3}$ dans le circuit récepteur. Sur la figure 4.3 on observe l'évolution de l'erreur $e(t) = V_{C_1} - V_{C_3}$. Dans la simulation une erreur a volontairement été introduite, les valeurs de R_1 et de R_3 différentes de $0,01\Omega$. L'erreur est bornée, la figure 4.3 montre l'évolution de l'erreur avec et sans synchronisation. On constate que cette méthode donne de très bons résultats. Remarquons aussi que la valeur de R_c a son importance, en pratique il faut rechercher la meilleure synchronisation en faisant varier R_c . En théorie, la valeur efficace de l'erreur $e(t)$ est

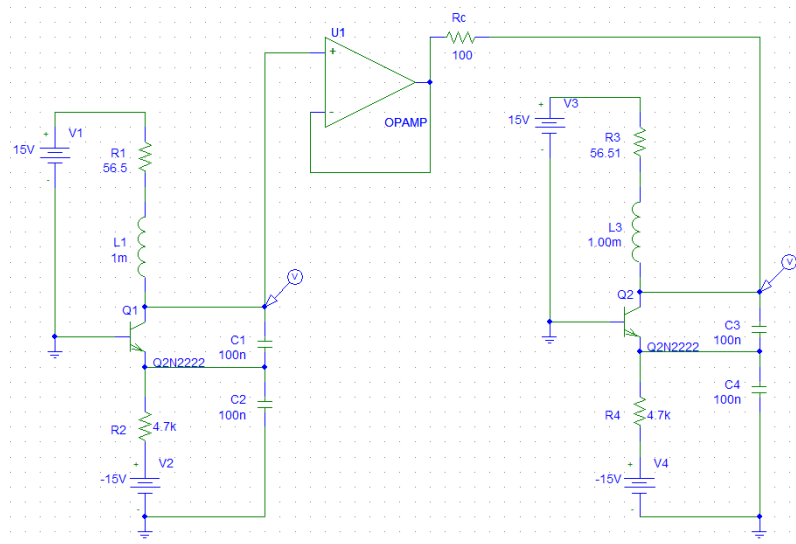


FIG. 4.2 – Synchronisation de deux oscillateurs de Colpitts par injection de courant.

une fonction croissante de R_c , pour $R_c \in]0, +\infty[$. Il suffit de faire plusieurs fois la simulation et de visualiser la valeur efficace de $e(t)$ en fonction de R_c . On verra que dans la pratique ce n'est pas tout à fait le cas.

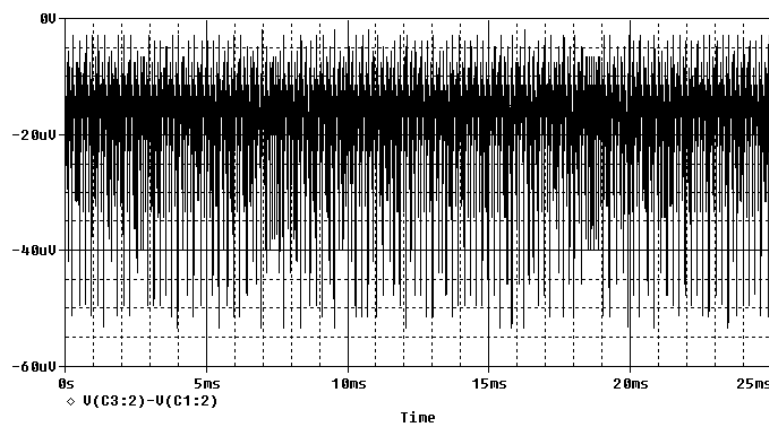


FIG. 4.3 – Évolution de l'erreur de synchronisation $e(t)$ pour $R_c = 20\Omega$.

Sans l'erreur commise volontairement sur l'un des composants l'erreur serait toujours nulle. D'ailleurs si aucune erreur n'est faite sur la valeur des composants et que l'on fait une erreur sur les conditions initiales du circuit récepteur par rapport au circuit émetteur, on observe une décroissance (très proche de la fonction exponentielle) de l'erreur $e(t)$, voir fig. 4.4.

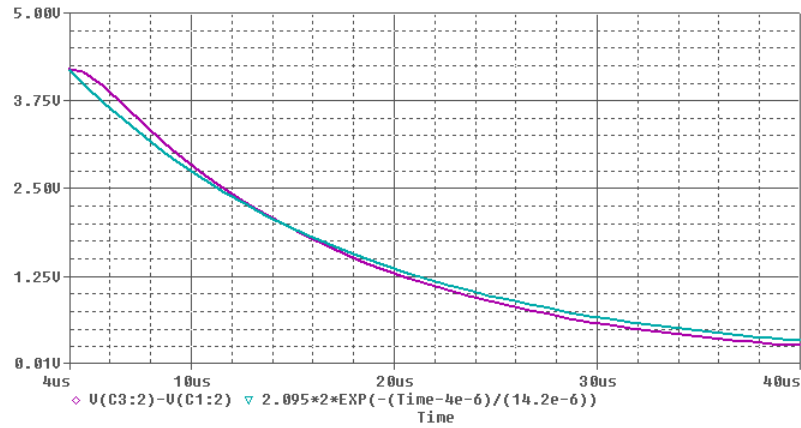


FIG. 4.4 – L'évolution de l'erreur de synchronisation $e(t)$ peut être approximée par une fonction exponentielle. Une différence de 1mA entre le courant initial des condensateurs C_1 et C_3 a été introduite.

En faisant cela on peut déterminer la valeur des parties réelles des exposants caractéristiques de la synchronisation. À titre d'exemple, les valeurs relatives au résultat de la figure 4.4 sont : $\Re(\lambda_1) \approx -14,2 \cdot 10^{-6} \text{s}^{-1}$, $\Re(\lambda_2) \approx -95 \cdot 10^{-6} \text{s}^{-1}$ et $\Re(\lambda_3) \approx -14,3 \cdot 10^{-6} \text{s}^{-1}$ où λ_1, λ_2 et λ_3 sont les valeurs propres de la matrice $J_F(\mathbf{X})$. Ceci permet alors d'affirmer que si on soumet le récepteur à une perturbation alors celle-ci n'aura que peu d'effet sur la synchronisation. On constate que la synchronisation est un phénomène très robuste.

Vérifier ce résultat de manière expérimentale, en utilisant du matériel de lycée, peut constituer une excellente preuve de la robustesse de la synchronisation. En effet, la tolérance de certains composants, notamment celle des condensateurs, peut atteindre $\pm 20\%$ et dans de telles conditions le résultat est loin d'être garanti.

J'ai réalisé deux oscillateurs de Colpitts, toujours avec les valeurs de composants utilisées précédemment. Après avoir vérifié le comportement de chacun des deux circuits, la structure permettant de les synchroniser a été mise en place, elle comporte un amplificateur opérationnel qui sera utilisé en suiveur et la résistance R_c (fig. 4.5, à gauche).

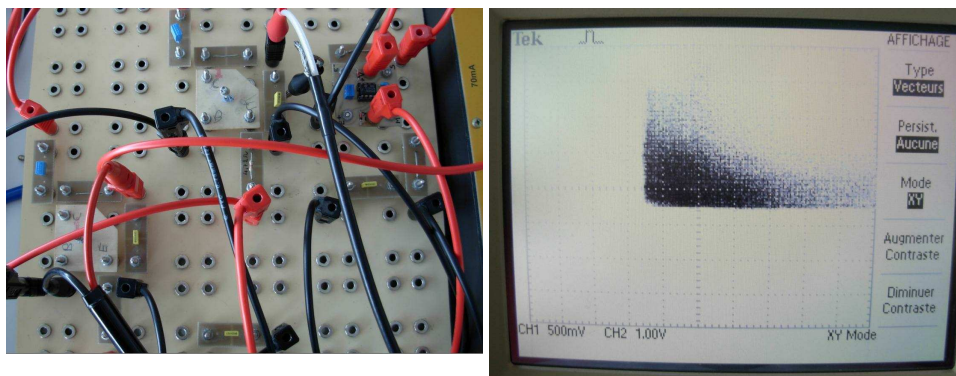


FIG. 4.5 – À gauche le circuit et à droite V_{C_1} (voie 2) en fonction de V_{C_3} (voie 1).

Dans un premier temps, j'ai choisi une valeur de R_c suffisamment élevée pour qu'il n'y ait pas de synchronisation entre les deux oscillateurs. J'ai pu observer (fig. 4.5) que les tensions du circuit émetteur et récepteur évoluaient de manières totalement différentes.

Par la suite, j'ai essayé plusieurs valeurs allant de 1Ω à 60Ω pour R_c et il s'est avéré que selon la valeur de R_c la synchronisation était plus ou moins bonne. Par exemple, pour $R_c = 1\Omega$ la synchronisation est moins bonne que si $R_c = 10\Omega$ et pour $R_c = 15\Omega$ la synchronisation est meilleure que si $R_c = 30\Omega$. Durant l'expérience, j'ai remarqué que la valeur de R_c pour laquelle la synchronisation est la meilleure était $R_c = 12\Omega$. La valeur efficace de l'erreur est donc en fait une fonction de R_c qui est d'abord décroissante, passe par un minimum, puis qui se remet à croître. Dans la pratique il existe donc une valeur de R_c pour

laquelle la synchronisation est optimale alors qu'en théorie il suffit de prendre R_c la plus petite possible (non nulle).

La figure 4.6 montre le résultat de la synchronisation pour $R_c = 12\Omega$, le résultat est surprenant car vraiment très bon malgré les différences qu'il peut y avoir entre les deux oscillateurs.



FIG. 4.6 – Résultats de la synchronisation, V_{C_1} et V_{C_3} vus en mode X-Y à gauche et en fonction du temps à droite (avec un léger offset sur la voie 1 pour une meilleure distinction).

4.2 Le chaos et la transmission de données

Utiliser deux systèmes chaotiques synchronisés pour transmettre des données de manière sécurisée est parfaitement envisageable.

4.2.1 Une méthode basée sur l'injection de courant

L'aspect aléatoire de la tension de sortie d'un oscillateur de Colpitts fait de cet oscillateur le candidat parfait pour dissimuler des données, qui seront comme "noyées dans un bruit chaotique". Le principe est simple, on ajoute une tension $m(t)$ à la tension de sortie de l'oscillateur servant d'émetteur (fig. 4.7).

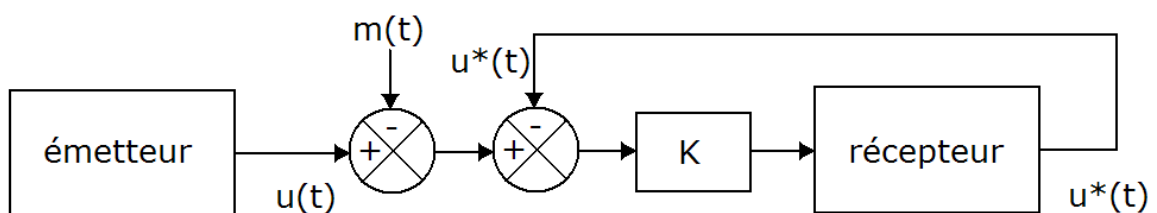


FIG. 4.7 – Utilisation de la synchronisation pour transmettre de manière sécurisée une tension $m(t)$

La non nullité de la valeur efficace de la tension $m(t)$ a pour effet de perturber la synchronisation des deux oscillateurs (émetteur et récepteur). La différence entre la tension de l'émetteur $u(t)$ et celle du récepteur $u^*(t)$ est proportionnelle à la perturbation $m(t)$. On peut d'ailleurs en déduire que si $m(t)$ était une tension parasite, l'erreur $u(t) - u^*(t)$ serait proportionnelle à $m(t)$ (d'amplitude plus faible car la synchronisation tend à atténuer les perturbations).

Mais ce n'est pas tout, la simulation du circuit (fig. 4.8) montre une tension un peu différente de $m(t)$, notons cette tension $m^*(t)$. Il faut en fait filtrer la tension $m^*(t)$ car son spectre contient désormais certaines fréquences, associées à de faibles amplitudes, qui proviennent des oscillateurs chaotiques.

Pour obtenir une très bonne corrélation entre $m(t)$ et $m^*(t)$ il faut respecter certaines conditions :

- La fréquence de $m(t)$ doit être relativement faible devant la fréquence d'oscillation des oscillateurs chaotiques.

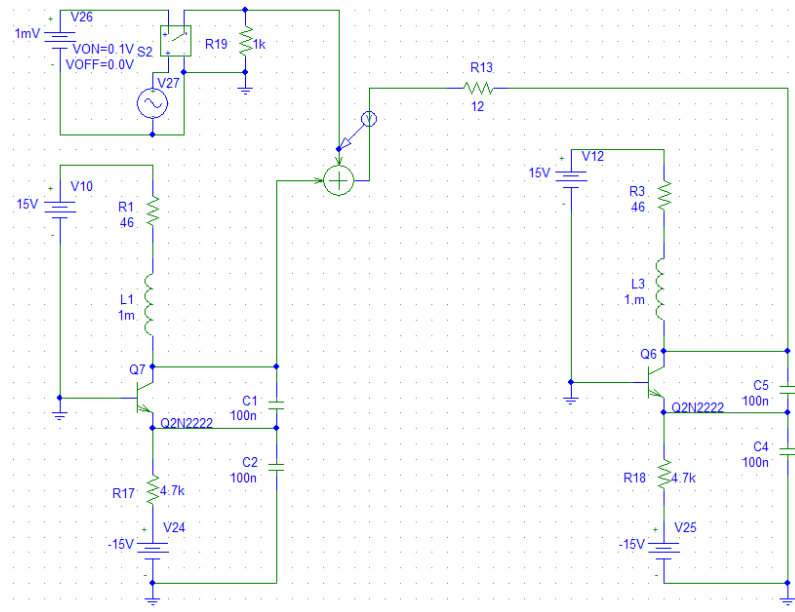


FIG. 4.8 – Circuit permettant la transmission sécurisée de $m(t)$, une tension en créneaux.

- L'amplitude de $m(t)$ doit être négligeable devant les amplitudes des oscillateurs chaotiques (au maximum 10%).
- L'amplitude associée à chaque fréquence du spectre de $m(t)$ doit être inférieure à l'amplitude correspondant aux mêmes fréquences des oscillateurs chaotiques (pour que $m(t)$ soit masquée).
- La fréquence de coupure du filtre passe bas (qui filtre $m * (t)$) doit être de l'ordre de cinq fois la fréquence de $m(t)$.

Lorsque ces différentes conditions sont réunies le résultat obtenu est vraiment très bon, c'est ce que montre la figure 4.9, la tension finale peut être mise en forme, les seuils sont parfaitement détectables.

4.2.2 Conclusion

Ce dossier a, dans un premier temps, présenté certaines méthodes d'approche pour l'étude des systèmes chaotiques. Par la suite, l'oscillateur de Colpitts a servi d'exemple pour mettre en évidence plusieurs phénomènes liés au chaos. Pour finir, un phénomène très intéressant, la synchronisation, a permis à ce travail de déboucher sur une application technologique liée à la sécurité dans la transmission des données.

Il existe en réalité plusieurs méthodes permettant de synchroniser deux systèmes chaotiques :

- La synchronisation par masquage additif : "chaos masking" (l'injection de courant en est un cas particulier).
- La modulation chaotique : chaos shift-keying.
- La modulation paramétrique qui consiste à agir sur un paramètre de l'émetteur.
- Et encore d'autres...

Dans le cadre du projet OCCULT (Optical Chaos Communications Using Laser-diode Transmitters), toutes ces méthodes ont été expérimentées. La méthode de masquage additif a donné de très bons résultats, sur une distance de 100 km le taux d'erreur binaire est inférieur à 6.10^{-8} pour une vitesse de transmission de 800Mbits/s. La fréquence de la porteuse chaotique étant de 15GHz (d'après la 30^e conférence sur les communications optiques de 2004, à Stockholm).

Il n'y a donc aucun doute, ce type de transmission peut avoir de meilleures performances que les systèmes déjà existants. Cependant, il reste un point qui pose encore des problèmes. En effet, la sécurité de la transmission repose sur l'aspect aléatoire des grandeurs chaotiques, mais les systèmes (émetteur et récepteur) étant déterministes, l'évolution des grandeurs chaotiques n'est pas aléatoire. Ceci pose donc un problème qui nous empêche de garantir que les données transmises sont effectivement sécurisées. Il y a d'ailleurs certaines méthodes qui ont totalement échoué car le message transmis a pu être reconstruit.

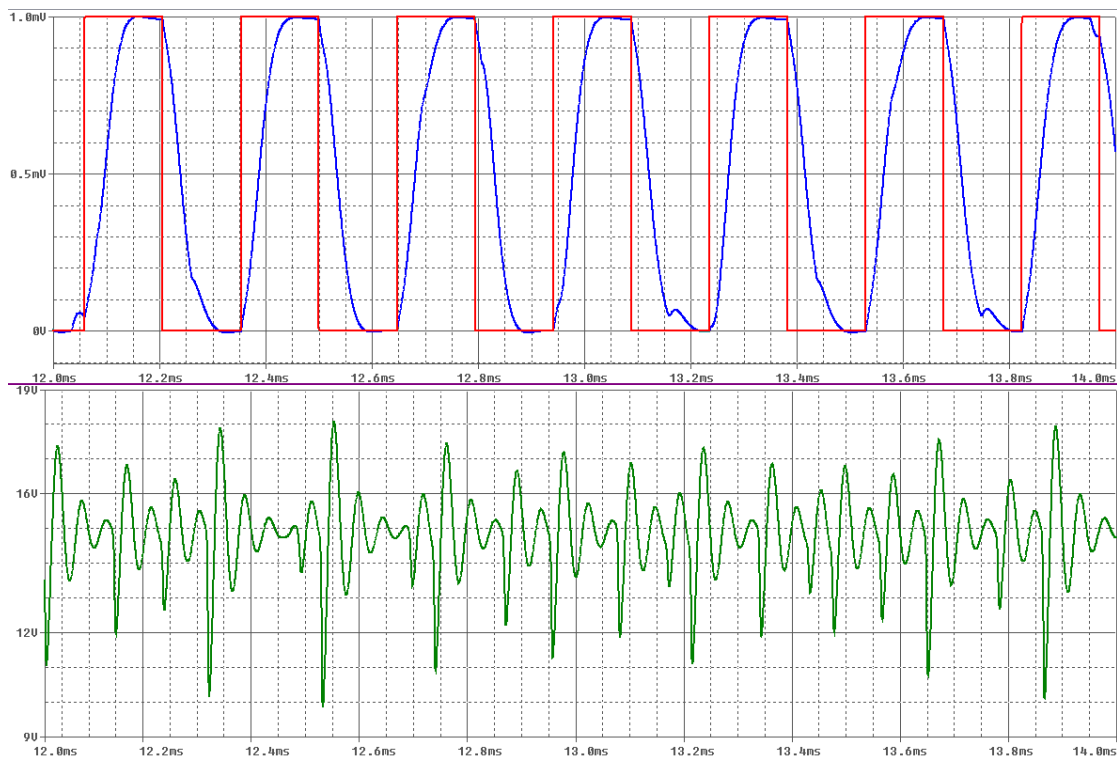


FIG. 4.9 – Résultat de la transmission et réception de $m(t)$ et signal chaotique transmis : $m(t)$ en rouge, $m^*(t)$ en bleu et $m(t) + V_{C_1}(t)$ en vert.

Des solutions basées sur l'optoélectronique sont étudiées afin d'accroître la complexité du chaos généré et donc rendre le système plus sûr.

La question reste ouverte mais le procédé a déjà fait ses preuves et n'a sûrement pas fini de nous surprendre. Les résultats futurs seront certainement très surprenants, efficaces et vraiment performants.

Bibliographie

- [1] Marc Lefranc, *L'analyse topologique du chaos : orbites périodiques, théorie des nœuds et dynamique symbolique*, Lille, exposé du 28 mars 2002.
- [2] Marc Lefranc, *Caractérisation topologique et contrôle du chaos*.
- [3] Marc Lefranc et Pierre Glorieux, *Dénouement dans le chaos*, Pour la science, 2001.
- [4] M. L'Hernault, A. Ouslimani et J. P. Barbot, *Conception et réalisation d'un observateur à modes glissants pour un oscillateur Colpitts chaotique*, Article de conférence, 2005.
- [5] Oscar De Feo, Gian Mario Maggio et Michael Peter Kenedy, *The Colpitts oscillator : families of periodic solutions and their bifurcations*, International Journal of Bifurcation & Chaos, vol. 10, no. 5, pp. 935-958, 2000.
- [6] Oscar De Feo et Gian Mario Maggio, *Bifurcations in the Colpitts Oscillator : From Theory to Practice*, International Journal of Bifurcation and Chaos, vol. 13, pp. 2917-2934, 2003.
- [7] Oscar De Feo, Gian Mario Maggio et Michael Peter Kenedy, *Nonlinear analysis of the Colpitts oscillator and applications to design*, IEEE Transactions on Circuits and Systems I-Regular Papers, vol. 46, no. 9, pp. 1118-1130, 1999.
- [8] Serge Dos Santos, *Étude non linéaire et arithmétique de la synchronisation des systèmes : application aux fluctuations de basse fréquence des oscillateurs ultra-stables*, Thèse, pages 11 à 22 et 75 à 100, 1998.
- [9] A. Uchida, K. Takahashi, M. Kawano, and S. Yoshimori, *Synchronization of chaos in one-way coupled Colpitts oscillators*, IEICE Transactions on Fundamentals, vol. E85-A, no. 9, pp. 2072-2077, 2002.
- [10] A. Uchida, M. Kawano, and S. Yoshimori, *Dual synchronization of chaos in Colpitts electronic oscillators and its applications for communications*, Physical Review E, vol.68, no.5, pp.056207-1-11, 2003.
- [11] Louis M. Pecora and Thomas L. Carroll, *Synchronization in Chaotic Systems*, Physical Review E, vol.64, no.8, 1990.
- [12] J.F. Heagy, T.L. Carroll and L.M. Pecora, *Synchronous chaos in coupled oscillator systems*, Physical Review E, vol.50, no.3, 1994.

Remerciements

Je remercie Marc Lefranc (chargé de recherche du CNRS au Laboratoire de Physique des Lasers, Atomes, Molécules à l'Université des Sciences et Technologies de Lille) qui m'a permis d'apprendre énormément sur la théorie du chaos, il m'a encouragé, aidé et a eu un œil critique sur mon travail. Je remercie également Benjamin Levrard (de l'observatoire de Paris) ainsi que toute l'équipe des enseignants de classe préparatoire du Lycée Colbert de Tourcoing et en particulier : Monsieur Boulenguez, Monsieur Bougeniere, Madame Wlodarczack, Monsieur Stévenard et Monsieur Caignaert (pour la mise en page des transparents). Je tiens aussi à adresser mes remerciements à ma mère, mes grands-parents et à Jean-François Petit.

Annexe A

Programme utilisé pour le diagramme de bifurcation

Voici la liste de toutes les fonctions utilisées par GNU Octave pour tracer un diagramme de bifurcation :
La fonction qui supprime le régime transitoire :

```
function y = regime_permanent(f, debut)
```

```
    dimension = length(f);
```

```
    for i = debut:dimension
        y(i-debut+1) = f(i);
    endfor
```

```
endfunction
```

Fonction qui calcule la dérivée :

```
function y = derive(x)
```

```
global pas;
```

```
    dimension = length(x);
```

```
    for i = 1:dimension-1
        y(i) = (x(i+1)-x(i))/pas;
    endfor
```

```
endfunction
```

Calcul d'un maximum :

```
function y = maximum(f, df)
```

```
global pas;
```

```
dimension = length(df);
```

```
j = 1;
```

```
    for i = 1:dimension-1
        if(df(i+1) <= 0 && df(i) >=0)
            y(j) = f(i);
            j = j+1;
        endif
```

```
    endfor
```

```
endfunction
```

Calcul des maxima :

```

function y= calcule(x)
global maxi
global n

    for i = 1:n
        f(i) = x(i,2);
    endfor

debut = 600;

yf = regime_permanent(f,debut);
dyf = derive(yf);
y = maximum(yf,dyf);

endfunction

```

Calcule la matrice qui contient tous les maxima en fonction du paramètre(abscisse du diagramme de bifurcation) :

```

function y = calc()

global g, maxi = 750, pas = 0.1, n = maxi/pas

j=1;

    for g=3:0.05:8.5
        f= calcule(lsolve("colpitts", [3;15;1], (0:pas:maxi)'));
        for i = 1:length(f)
            y(i,j) = f(i);
        endfor
        j=j+1;
    endfor
endfunction

```

Pour afficher le diagramme :

```

function y = calc_vec()
j=1;
    for g=2:0.01:3
        for i = 1:67
            y(i,j) = g;
        endfor
        j=j+1;
    endfor
endfunction

y = calc(); t = calc_vec();
gset noparametric
plot(t,y,"@1");

```