

Modélisation de l'effet Poynting-Robertson

Table des matières

Introduction.....	p.3
1 Théorie de l'effet Poynting Robertson.....	p.4
2 Mise en oeuvre numérique.....	p.9
2.1) Équations.....	p.9
2.2) Intégration numérique.....	p.11
2.3) Traitement des données.....	p.13
3 Analyse des données.....	p.19
3.1) Mise en évidence de l'effet de la pression de radiation.....	p.19
3.2) Mise en évidence de l'effet Poynting-Robertson.....	p.21
3.3) Influence du paramètre β dans le cadre de l'effet Poynting-Robertson.....	p.23
3.4) Vitesse de chute.....	p.27
Conclusion.....	p.30
Annexe A : La méthode de Runge-Kutta d'ordre 4.....	p.31
Annexe B : Le code Matlab.....	p.33
Bibliographie.....	p.37
Remerciements :.....	p.37

Introduction

L'univers tout entier est le théâtre de nombreux phénomènes tous plus fascinants les uns que les autres. Parmi ces phénomènes on compte l'effet Poynting-Robertson et les effets de la pression de radiation qu'exerce un corps rayonnant, sur la dynamique des particules interstellaires. Ce que l'on appelle la lumière zodiacale est un phénomène électromagnétique qui résulte de la réflexion de la lumière du Soleil par les particules qui composent le milieu interplanétaire. Le spectre de cette lumière est globalement le même que la lumière solaire, cependant une faible partie de la lumière solaire est absorbée par les poussières interplanétaires puis ré-émise dans l'infra-rouge. Ce phénomène d'interaction lumière/matière a pour conséquence de faire lentement spiraler les poussières vers le Soleil. Ce phénomène est appelé effet Poynting-Robertson qui a été découvert par John-Henri Poynting, physicien anglais en 1903, et dont Howard Percy Robertson physicien américain en donna une explication dans la cadre de la théorie de la relativité générale en 1937.

Nous nous proposons au travers de ce mémoire de modéliser l'effet Poynting-Robertson et d'analyser de façon critique les conséquences de ce phénomène sur la dynamique d'une particule composant le milieu inter-stellaire. Nous développerons dans un premier temps la théorie de l'effet Poynting Robertson, nous expliquerons comment la gravitation, la pression de radiation et l'aberration de la lumière sont à l'origine de ce phénomène. Ensuite, nous expliciterons notre méthodologie et nos choix dans la mise en oeuvre numérique de notre problème. La dernière partie sera consacrée à l'exploitation critique des résultats que nous avons obtenus.

1 Théorie de l'effet Poynting Robertson.

Soit une poussière interstellaire en interaction avec une étoile comme le Soleil par exemple, il s'agit d'un problème à deux corps. Cependant, du fait que la masse du Soleil :

$$(1) \quad M_{\text{Soleil}} \gg m_{\text{poussière}}$$

donc la masse réduite du système est très peu différente de celle de la poussière, en effet :

$$(2) \quad \frac{1}{\mu} = \frac{1}{M_{\text{Soleil}}} + \frac{1}{m_{\text{poussière}}} \approx \frac{1}{m_{\text{poussière}}}$$

En ce qui concerne le centre de masse du système {Soleil/poussière}, il peut être considéré comme confondu avec le centre du Soleil. En effet on a par définition du centre de masse

$$(3) \quad M_{\text{Soleil}} * \vec{S}G + m_{\text{poussière}} * \vec{P}G = \vec{0}$$

où S et P sont définis respectivement par le centre de gravité du Soleil et le centre de gravité de la poussière.

Ainsi

$$(4) \quad \|M_{\text{Soleil}} * \vec{S}G + m_{\text{poussière}} * \vec{P}G\|^2 = 0 \quad \text{d'où}$$

$$(5) \quad SG^2 + \frac{m^2}{M^2} * PG^2 + \frac{2 * m}{M} * SG * PG = 0$$

Si bien que $SG \approx 0$. S et G sont donc confondus. Dans ces conditions on étudie la dynamique d'une poussière interstellaire de masse m , en interaction avec le Soleil dans le référentiel du Soleil. Pour résoudre ce problème nous adopterons le formalisme newtonien, par voie de conséquence nous recensons les forces qui s'appliquent sur la poussière et qui influent sur sa dynamique. Ainsi d'une part, le Soleil exerce sur la poussière une force gravitationnelle attractive :

$$(6) \quad \vec{F}_{\text{grav}} = \frac{-G * M_{\text{soleil}} * m_{\text{poussière}}}{r^2} \vec{e}_r$$

Et d'autre part la poussière subit la pression de radiation du flux de photons incidents

telle que

$$(7) \quad \vec{F}_{rad} = \frac{AS}{cr^2} \vec{e}_r, \text{ où } A \text{ est la section efficace}^1 \text{ de la poussière et } S \text{ la constante solaire}^2.$$

Les deux forces sont radiales, mais la gravitation est attractive tandis que la pression de radiation est répulsive.

Qu'est-ce que la pression de radiation ou plutôt que se passe-t-il lorsqu'un photon de fréquence ν rencontre un atome dans l'état fondamental ? Selon la mécanique quantique l'atome absorbe ce photon et passe ainsi de l'état fondamental à un état excité. Conformément à la loi de conservation de la quantité de mouvement on a :

$$(8) \quad P_{photon}^{\vec{}} + P_{atome}^{\vec{}} = \vec{0}$$

L'atome recule de la même façon qu'un canon recule après avoir tiré un obus. Après un temps τ_r , de l'ordre de 10^{-8} seconde, l'atome se désexcite en émettant à son tour un photon de même fréquence. Cependant l'émission du photon est isotropique si bien que, moyenné sur toutes les directions possibles, le recul de l'atome est nul. Tout se passe comme si le photon exerçait une force de pression sur l'atome. Ce phénomène est connu sous le nom de pression de radiation.

Si maintenant nous remplaçons les atomes par des particules interstellaires que nous supposons être des agrégats d'atomes, nous pouvons dans une première approximation considérer leur comportement analogue à celui des atomes.

Compte tenu de toutes ces grandeurs physiques, d'après le principe fondamental de la dynamique appliqué à la poussière on a

$$(9) \quad \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{-GM}{r^2} \vec{e}_r + \frac{AS}{mcr^2} \vec{e}_r$$

En introduisant β , comme le rapport entre la pression de radiation et la gravitation tel que $\beta = \frac{AS}{GMmc}$, l'équation (9) devient :

$$(10) \quad \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -GM \frac{(1-\beta)}{r^2} \vec{e}_r$$

1 Une **section efficace** est une grandeur physique correspondant à la probabilité d'interaction d'une particule pour une réaction donnée. L'unité de la section efficace est le barn ($1b=10^{-28} \text{ m}^2$)

2 La **constante solaire** exprime la quantité d'[énergie solaire](#) (en fait une puissance d'éclairage) que recevrait une surface de 1m^2 située à une distance de 1 unité astronomique (distance moyenne terre-soleil) exposée perpendiculairement aux rayons du [Soleil](#) si l'atmosphère terrestre n'existait pas, $S= 1,367 \text{ kW/m}^2$

Cette équation est celle d'un mouvement keplerien lorsque le potentiel considéré est attractif.

Dans cette configuration, la pression de radiation vient écranter les effets de la gravitation. Nous avons défini β comme le rapport de la pression de radiation à la gravité. Ainsi, d'un point de vu qualitatif et a priori, si $\beta > 1$ la pression de radiation l'emporte sur la gravité, la particule est éjectée. Les conclusions sont inversées si $\beta < 1$. Comme $\beta = \frac{AS}{GMmc}$, la pression de radiation est d'autant plus intense que la masse de la particule est faible.

Cependant cette équation suppose implicitement que la vitesse de la poussière n'est pas relativiste. En effet on ne tient pas compte du phénomène d'aberration de la lumière, phénomène découvert par James Bradley en 1725. Supposons un récepteur mobile ayant une vitesse \vec{v}_r , recevant de la lumière provenant d'une source considérée immobile. Du fait du mouvement relatif du récepteur par rapport à la source, le récepteur perçoit le flux de photons non pas de façon perpendiculaire mais avec une légère inclinaison vers l'avant. Ce phénomène est connu sous le nom d'aberration de la lumière (cf fig.1).

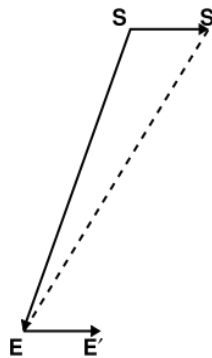


Figure 1: aberration de la lumière

Faisons un petit calcul afin de démontrer ce résultat. Pour cela considérons l'étoile γ du Dragon située sensiblement sur un axe perpendiculaire au plan de l'ecliptique. Soit R le référentiel lié au Soleil, et soit R' le référentiel lié à l'observateur sur Terre. On considère R' en translation rectiligne uniforme par rapport à R à la vitesse $\vec{v}_e = 3.10^4 \text{ m.s}^{-1}$. La direction des photons émis par le Soleil et reçus par la Terre s'obtient à partir des formules de transformation des vitesses, sachant que $\vec{v}_x = \vec{0}$, les photons n'ayant qu'une composante selon y si bien que $\vec{v}_y = -c \vec{e}_y$.

Donc on a

$$(11) \quad v_x' = \frac{(v_x - v_e)}{1 - v_x v_e / c^2} = -v_e$$

et

$$(12) \quad v_y' = \frac{v_y}{\gamma_e(1 - v_x v_e/c^2)} = \frac{-c}{\gamma_e}$$

Il en résulte que

$$(13) \quad \tan(\theta') = \frac{v_y'}{v_x'} = \frac{c}{\gamma_e v_e} = \frac{1}{\gamma_e \beta_e}$$

L'angle d'aberration

$$(14) \quad \alpha = \frac{\pi}{2} - \theta' \approx \tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta'\right) = \frac{1}{\tan(\theta')} = \gamma_e \beta_e$$

Ainsi on vérifie que si $v_e \ll c$, alors

$$(15) \quad \gamma_e \beta_e = \frac{v_e}{c} \frac{1}{\sqrt{1 - (v_e/c)^2}} = \frac{1}{\sqrt{((c/v_e)^2 - 1)}} \approx 0 \quad \text{car} \quad \frac{c}{v_e} \gg 1$$

Dans ce cas l'aberration devient négligeable. Quoiqu'il en soit si l'on tient compte de l'aberration de la lumière, la pression de radiation ayant même orientation et même sens que le sens du flux de photons incident, cela rajoute une composante tangentielle qui s'oppose au mouvement de la poussière (cf fig.2), la force de Poynting-Robertson est donc une force dissipative.

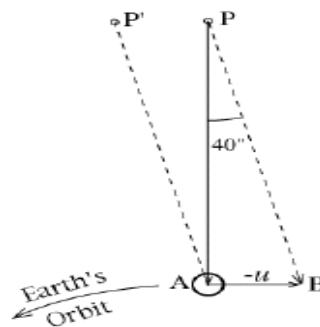


Figure 2: conséquence de l'aberration sur la dynamique d'une poussière

La direction PB est la direction incidente du flux de photons, perçue par la poussière. La direction PA serait celle du flux de photons si la poussière était immobile.

On peut montrer que l'équation du mouvement, dans ces conditions, s'écrit :

$$(16) \quad \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \frac{-GM}{r^2} \vec{e}_r + \frac{\beta GM}{r^2} \left[\left(1 - \frac{\vec{v} \cdot \vec{e}_r}{c}\right) \vec{e}_r - \frac{\vec{v}}{c} \right]$$

Le problème étant identifié, nous allons décrire la méthodologie utilisée dans sa résolution numérique.

2 Mise en oeuvre numérique

2.1) Équations

Au début nous avons tâtonné. En nous basant sur les informations fournies avec le sujet distribué, nous obtenions parfois les trajectoires attendues, mais trop rarement. Le problème venait du trop grand nombre de paramètres à ajuster. Ainsi notre programme demandait des masses en mg, des durées en années et des longueurs allant du μm (rayon d'une poussière) à l'unité astronomique (rayon de l'orbite). Le logiciel manipulant des valeurs si différentes et extrêmes, il n'était pas étonnant de tomber dans des erreurs d'intégration numérique. De plus les temps de calcul étaient difficilement supportable, car pour obtenir la précision voulue le nombre de points à calculer était de l'ordre du million.

Nous avons surmonté ces obstacles en reprenant tout à zéro à partir d'autres équations plus simples et plus claires. En effet, celles données par H. BEUST dans sa publication nous ont parues meilleures car elles ne dépendent que d'un paramètre lié à la particule, β , et de 3 constantes, G , M et c . les équations de la dynamique des particules soumises à l'effet Poynting-Robertson devenaient :

$$(17) \quad \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = -\frac{GM}{r^2} \vec{e}_r - \frac{\beta GM}{r^2} \left[\left(1 - \frac{\dot{r}}{c}\right) \vec{e}_r - \frac{\vec{v}}{c} \right]$$

avec

$$(18) \quad \dot{r} = \vec{e}_r \cdot \vec{v} \text{ et } \vec{e}_r = \frac{\vec{r}}{r}$$

Encore faut-il les rendre intégrables par Matlab. Pour cela on les projette dans le repère cartésien à 2 dimensions, car on a vu que le mouvement est plan :

$$(19) \quad \begin{aligned} \frac{d^2 x}{dt^2} &= -\frac{GM}{r^3} x - \frac{\beta GM}{r^2} \left[\left(1 - \frac{x\dot{x} + y\dot{y}}{rc}\right) \frac{x}{r} - \frac{\dot{x}}{c} \right] \\ \frac{d^2 y}{dt^2} &= -\frac{GM}{r^3} y - \frac{\beta GM}{r^2} \left[\left(1 - \frac{x\dot{x} + y\dot{y}}{rc}\right) \frac{y}{r} - \frac{\dot{y}}{c} \right] \end{aligned}$$

Ensuite on les met sous forme de Cauchy, pour obtenir le système suivant :

$$(20) \quad \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= v_x \\ \frac{dv_x}{dt} &= -\frac{GM}{r^3} x - \frac{\beta GM}{r^2} \left[\left(1 - \frac{xv_x + yv_y}{rc} \right) \frac{x}{r} - \frac{v_x}{c} \right] \\ \frac{dy}{dt} &= v_y \\ \frac{dv_y}{dt} &= -\frac{GM}{r^3} y - \frac{\beta GM}{r^2} \left[\left(1 - \frac{xv_x + yv_y}{rc} \right) \frac{y}{r} - \frac{v_y}{c} \right] \end{aligned}$$

Ce sont ces dernières équations qui constituent la fonction appellable par le solveur d'équations différentielles.

```
function yp=fct2(t,y)g
global M G B c
yp=zeros(size(y));
A=M*G*B;
r=sqrt(y(1)^2+y(3)^2);
yp(1)=y(2);
yp(2)=- (G*M*y(1)/r^3)-(A/r^2)*((1-(y(1)*y(2)+y(3)*y(4))/(c*r))*(y(1)/r)-y(2)/c);
yp(3)=y(4);
yp(4)=- (G*M*y(3)/r^3)-(A/r^2)*((1-(y(1)*y(2)+y(3)*y(4))/(c*r))*(y(3)/r)-y(4)/c);
```

avec $y(2) = v_x$, et $y(4) = v_y$. Le résultat donnera une matrice $N \times 4$, N étant le nombre de points calculés. La première colonne donne $x(t)$, la deuxième donne $v_x(t)$, la troisième $y(t)$ et la quatrième correspond à $v_y(t)$.

De la même manière on écrit la fonction appellable pour le cas non-relativiste où l'on ne tient pas compte de l'aberration lumineuse.

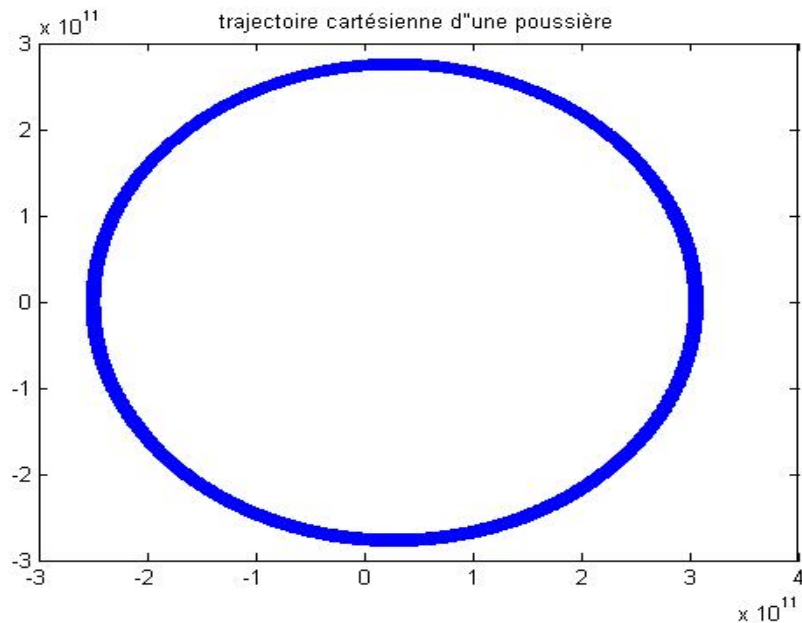
```
function yp=fct(t,y)
global M G B
yp=zeros(size(y));
yp(1)=y(2);
yp(2)=-G*M*(1-B)*y(1)/((y(1)^2+y(3)^2)^(3/2));
yp(3)=y(4);
yp(4)=-G*M*(1-B)*y(3)/((y(1)^2+y(3)^2)^(3/2));
```

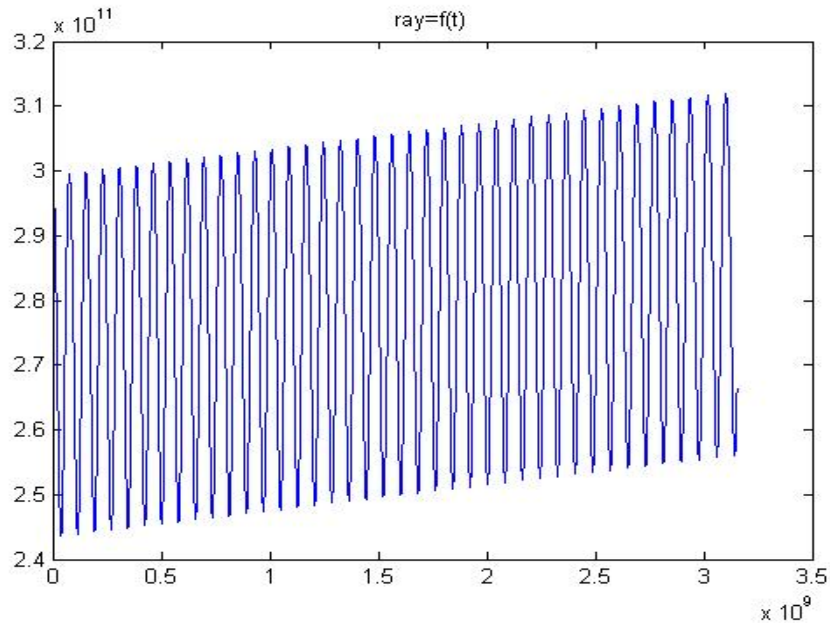
Ainsi le programme est commun aux 2 cas, il suffit d'échanger l'appel de fonction au moment de l'intégration.

2.2) Intégration numérique

Pour intégrer ces équations, nous avons d'abord utilisé les solveurs gracieusement fournis par Matlab. Pour tester le bon fonctionnement de l'intégration numérique, il nous suffisait de fixer $\beta = 0$ dans le cas relativiste (c'est à dire en utilisant fct2 comme fonction). Dans ce cas, toute la partie de l'équation due à l'effet Poynting-Robertson disparaissait et le problème à résoudre devenait simplement Keplerien.

Il a fallu remettre en cause la fiabilité de Matlab quand nous obtenions des trajectoires spiralantes vers l'extérieur là où nous aurions dû trouver des ellipses Kepleriennes.

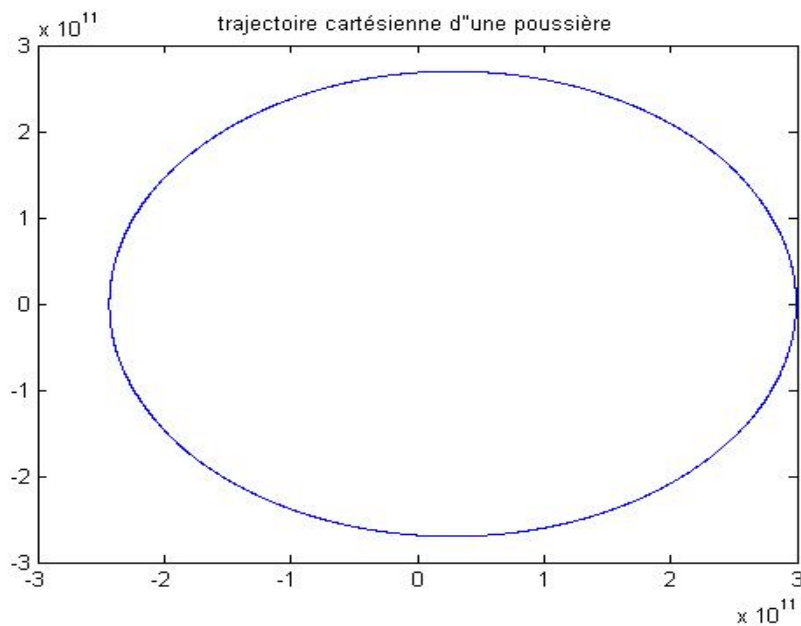




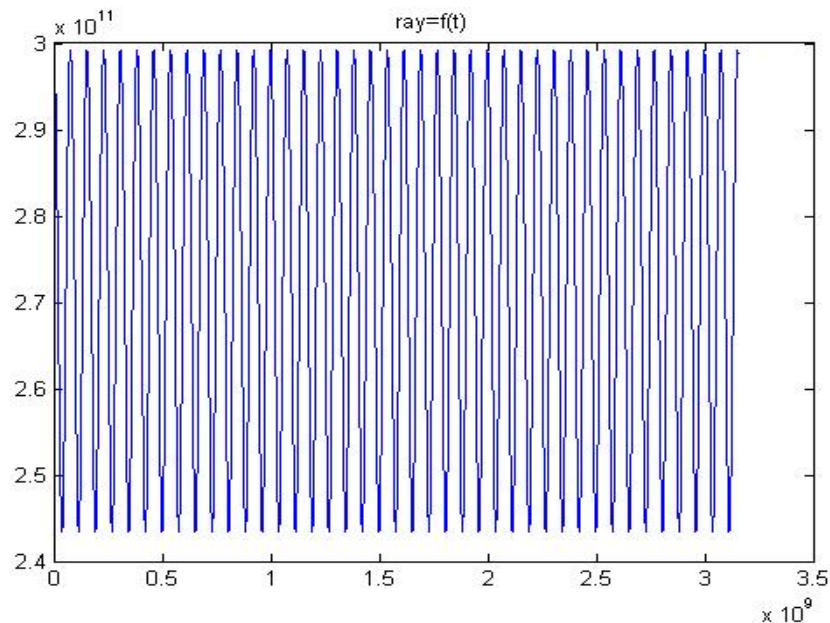
Figures 3: Résultat de l'intégration par ode23 avec $\beta = 0$. L'épaisseur de la trajectoire cache des ellipses dont la taille augmente au cours du temps, comme le montre la seconde courbe.

Les imprécisions informatiques pour ce cas simple auraient rendus nos résultats postérieurs peu exploitables, voire même inexplicables.

Nous avons testé à peu près tous les solveurs de Matlab, ils donnaient tous des résultats similaires. Avant de remettre une fois de plus les équations en cause, nous avons essayé d'implanter notre propre solveur d'équations différentielles en nous basant sur le schéma Runge-Kutta à l'ordre 4³. On obtenait alors les résultats suivants :



3 Pour plus de précisions, cf annexe A



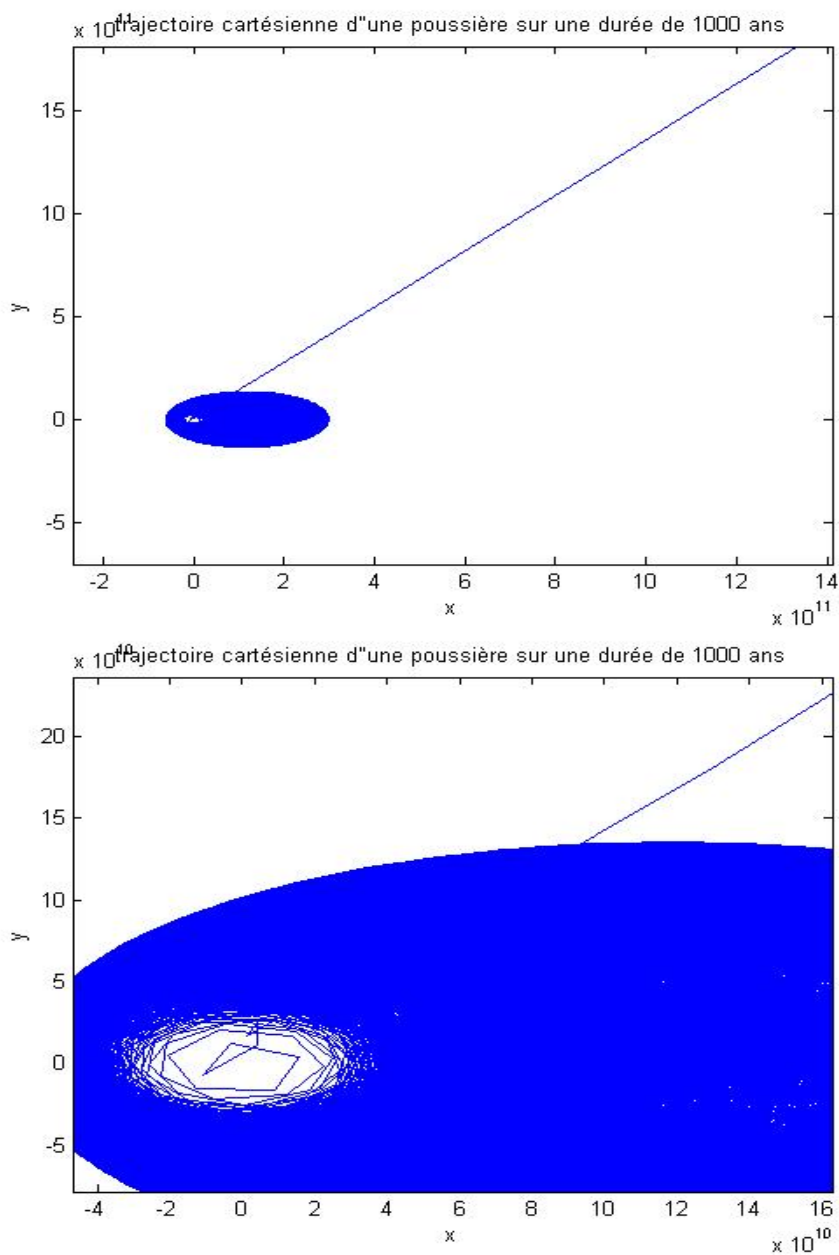
Figures 4: Résultat de l'intégration par la méthode de Runge-Kutta d'ordre 4 avec $\beta_{PR} = 0$.

Joie, bonheur et pâmoison : ces courbes correspondent bien à ce qu'on avait déduit de la théorie. Sans tergiverser, nous avons décidé de garder les équations et notre méthode de résolution.

Avec ce test sur un modèle simple, les données recueillies sur l'effet Poynting-Robertson devenaient beaucoup plus fiables. Encore fallait-il traiter les résultats.

2.3) Traitement des données

Tout d'abord, nous devons savoir quelles étaient les limites de notre modèle numérique. Effectivement, lorsque la trajectoire approche trop dangereusement de l'origine du repère, le calcul devient instable parce que les ellipses sont trop petites et le nombre de points par tour devient trop faible. L'exemple ci-dessous nous montre une trajectoire qui finit mal après avoir bien commencé. Il s'agit d'un cas où on tient compte de l'effet de Poynting-Robertson. On verra plus bas ce qu'il y a dans ces masses bleues.



Figures 5: Cas où l'intégration fait des siennes

Nous avons résolu ce problème avec ces quelques lignes de code :

```
l=1;  
  
while sqrt(y(l,1)^2+y(l,3)^2)>0.2*UA  
  
    l=l+1;  
  
    if (l==length(y))
```

```
break;  
  
end  
  
end  
  
y = y(1:l,:);  
  
t = t(1:l);
```

Oui, nous nous sommes contentés de couper là où ça fait mal. Cette portion de code sert à tronquer le vecteur solution (y) dès que la distance à l'origine est inférieure à 0,2 UA. La valeur de cette limite dépend des cas étudiés et on peut la modifier dès qu'on voit que la solution diverge au centre. On peut même trouver une justification physique à cette méthode : les amas de particules considérés sont tellement petits qu'on peut penser qu'ils s'évaporent en s'approchant de l'étoile autour de laquelle ils gravitent. Cette troncature sauvage peut alors être vue comme une sublimation ou une désintégration des particules sous l'effet de la chaleur stellaire. C'est très approximatif mais l'objet de cette étude n'est pas d'étudier en détails ce qu'il se passe à l'approche du soleil.

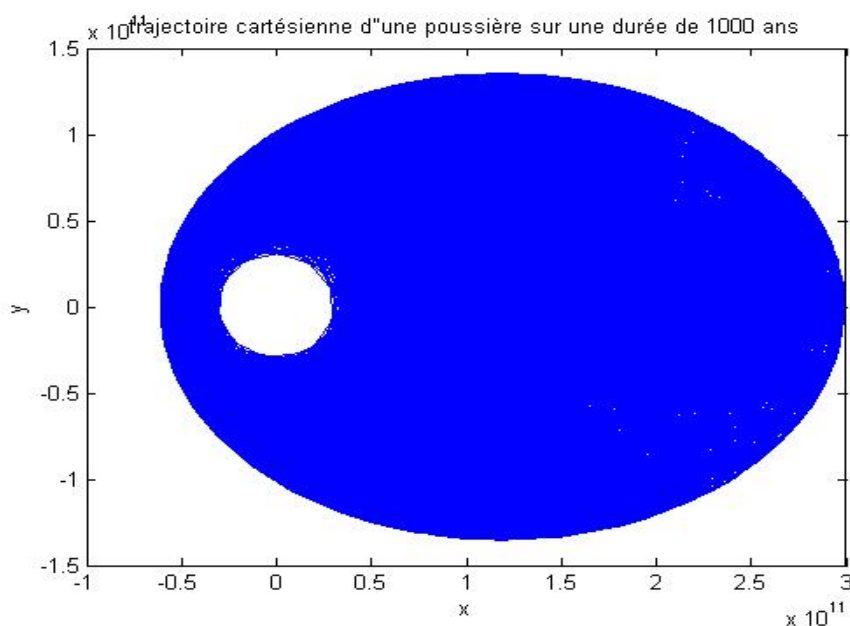


Figure 6: La même chose que la figure précédente, en activant la troncature.
On perd quelques tours mais c'est plus joli.

Ensuite, il fallait trouver, pour bien étudier le problème de Poynting-Robertson, dans quelles conditions initiales approximatives se placer pour que la trajectoire reste liée. On veut se cantonner à ce type de trajectoires car les hyperboles ne sont pas bienvenues dans cette étude, bien qu'on puisse les retrouver. Nous avons décidé de fixer une fois pour toutes la position de départ en $(2 \cdot \text{UA}; 0)$, pour simplifier l'étude. La seule condition initiale est alors la vitesse initiale suivant l'axe (Oy) , parce que rajouter une vitesse initiale suivant (Ox) n'a que peu d'intérêt, à part

faire pivoter l'axe principal des ellipses. Encore une fois, l'objet n'est pas de faire de la dynamique keplerienne.

Pour cela, pas de solution miracle, on teste. En fixant $\beta=0,2$, nous avons cherché à tâtons quelles valeurs de v_{y0} permettaient d'obtenir des ellipses, sans s'inquiéter de la taille de ces ellipses, ni de leur décroissance, s'il y en a une. Nous arrivons alors à 2 cas possibles :

$\beta < 28000 \text{ m.s}^{-1}$: On a des ellipses. Elles se comportent bien, on s'en occupera dans la partie suivante.

$\beta > 28000 \text{ m.s}^{-1}$: Nous ne sommes plus intéressés, car la trajectoire devient hyperbolique. Voir la figure ci-dessous :

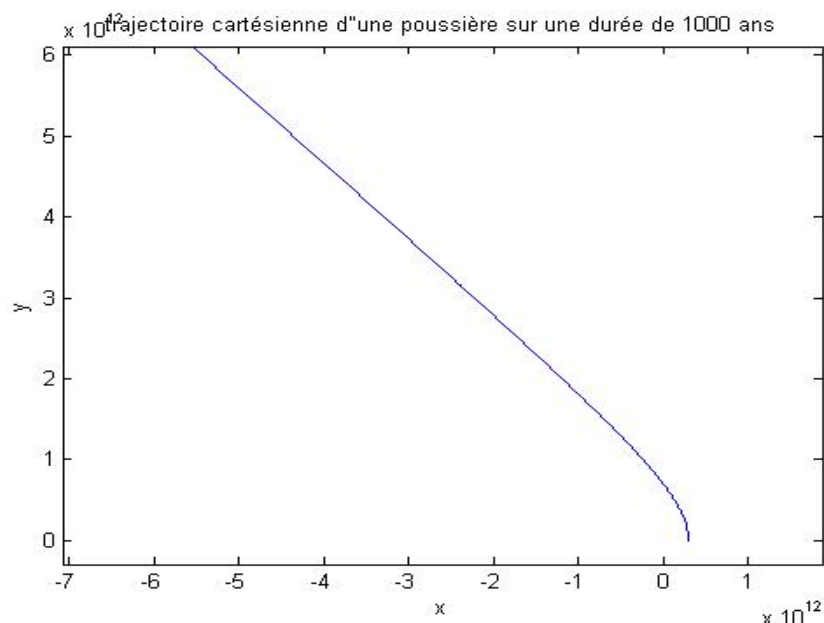


Figure 7: Cas d'une trajectoire hyperbolique avec $v_0=30000 \text{ m.s}^{-1}$

Bien sûr, la valeur 28000 m.s^{-1} est une estimation large, qui permet d'avoir un peu de marge. Par ailleurs, même si théoriquement rien ne l'empêche, il n'est pas recommandé de prendre des vitesses trop faibles ($\sim 10000 \text{ m.s}^{-1}$), car la particule tombe trop vite et la trajectoire est très vite tronquée par l'algorithme prévu à cet effet.

Nous savions alors qu'il fallait des vitesses de l'ordre de 20000 m.s^{-1} pour avoir des courbes exploitables. Il ne restait plus qu'à trouver de quelle manière exploiter les gros pâtés bleus que l'on a pu voir dans les figures précédentes.

Les paramètres qu'il nous a paru intéressant d'étudier sont l'excentricité des ellipses successives et la distance à l'origine de la particule au cours du temps. L'excentricité est un paramètre intéressant car il permet de voir comment évoluent les ellipses qui se succèdent, si elles tendent vers le cercle ou pas. Le rayon indique quand à lui à quelle vitesse décroît l'orbite (si elle décroît bien entendu, gardons encore un peu de suspens pour le fin)

Le module du vecteur position n'était pas difficile à calculer. Ayant intégré les équations

dans le plan cartésien, cette simple ligne de code suffisait à la tâche :

```
ray=sqrt(y(:,1).^2+y(:,3).^2);
```

Par contre il n'est pas aisé de calculer l'excentricité d'une ellipse tracée numériquement par Matlab. Tout d'abord il faut faire un dessin :

(dessin à imaginer soi-même car ajouté à la main sur la version finale du texte, désolé)

r_1 et r_2 sont très facile à trouver, car ils correspondent à des extrema locaux du rayon. La portion de code suivante permet de trouver les r_1 et r_2 successifs (pour chaque ellipse) aux imprécisions numériques près.

```
j=0;l=0;  
  
r1(1)=0;  
  
r2=r1;  
  
for k=2:length(ray)-1  
  
    if (ray(k-1)>ray(k) && ray(k+1)>ray(k))  
  
        j=j+1;  
  
        r1(j)=ray(k);  
  
    end  
  
    if (ray(k-1)<ray(k) && ray(k+1)<ray(k))  
  
        l=l+1;
```

```
    r2(l)=ray(k);  
  
    end  
  
end  
  
if j>l  
  
    r1=r1(1:l);  
  
end  
  
if l>j  
  
    r2=r2(1:j);  
  
end
```

Cet algorithme repose sur le fait qu'un maximum est toujours encadré par 2 valeurs inférieures et inversement, un minimum est encadré par deux valeurs supérieures. Les 2 branchements conditionnels if dans la boucle for trouvent les valeurs du rayon qui vérifient ces critères et les enregistrent dans les vecteurs r1 et r2. Les conditions sur j et l à la fin résolvent des problèmes d'incompatibilités de taille entre les deux vecteurs si jamais la dernière ellipse n'est pas complètement terminée. En bonus, les indices j et l nous donnent directement le nombre de tours effectués, ce qui peut servir.

Pour continuer, avec r₁ et r₂ uniquement, on peut retrouver l'excentricité de l'ellipse. En effet on sait que

$$(21) \quad e = \frac{c}{a}$$

c étant la distance entre un foyer et l'intersection des 2 axes de l'ellipse et a le demi grand axe de l'ellipse. On peut alors dire que

$$(22) \quad c = a - r_1 \quad \text{et} \quad a = \frac{(r_1 + r_2)}{2}$$

On peut alors retrouver les excentricités des ellipses. Par contre l'excentricité ne pourra être donnée qu'en fonction du nombre de tours et pas en fonction du temps.

On se servira surtout de l'excentricité pour étudier les trajectoires, car, excepté pour son caractère esthétique, le tracé des trajectoires en lui-même n'apporte pas grand chose.

Le reste du code concerne l'affichage graphique, nous ne jugeons pas nécessaire de le détailler pour passer directement aux résultats obtenus.

3 Analyse des données.

3.1) Mise en évidence de l'effet de la pression de radiation.

Considérons le cas où la vitesse de la poussière n'est pas relativiste. On utilise dans ce cas l'équation (11).

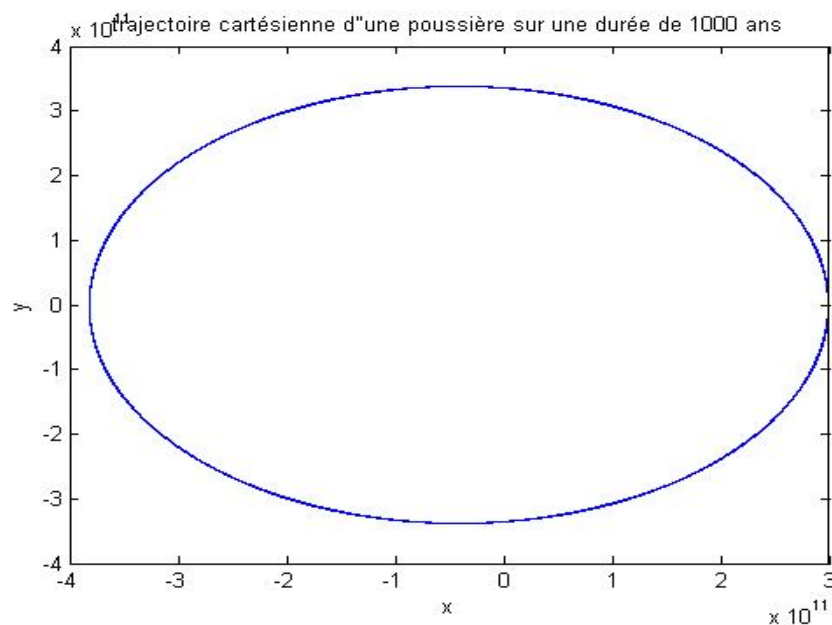


Figure 9: trajectoire d'une particule soumise à la pression de radiation sans tenir compte de l'aberration lumineuse

La trajectoire est une ellipse, d'excentricité constante. En effet, ci-dessous nous traçons l'excentricité de la trajectoire.

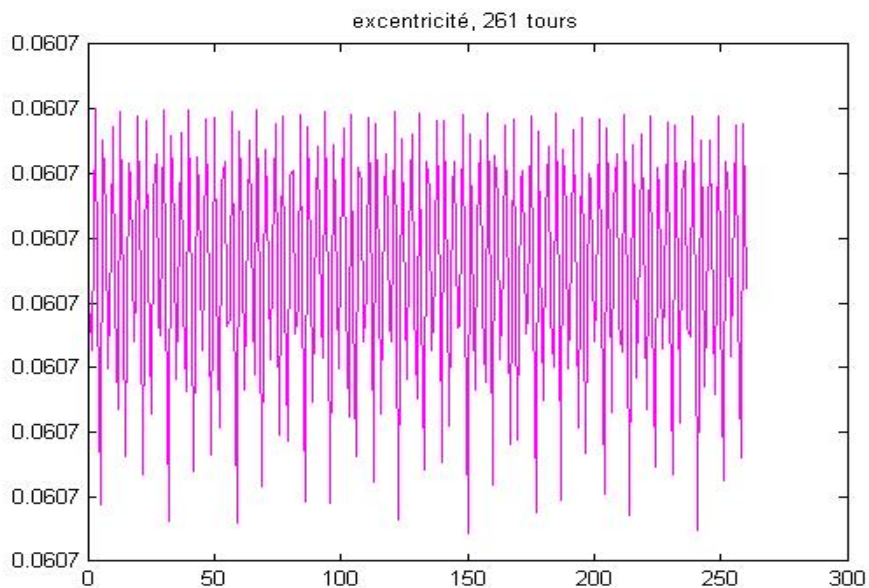
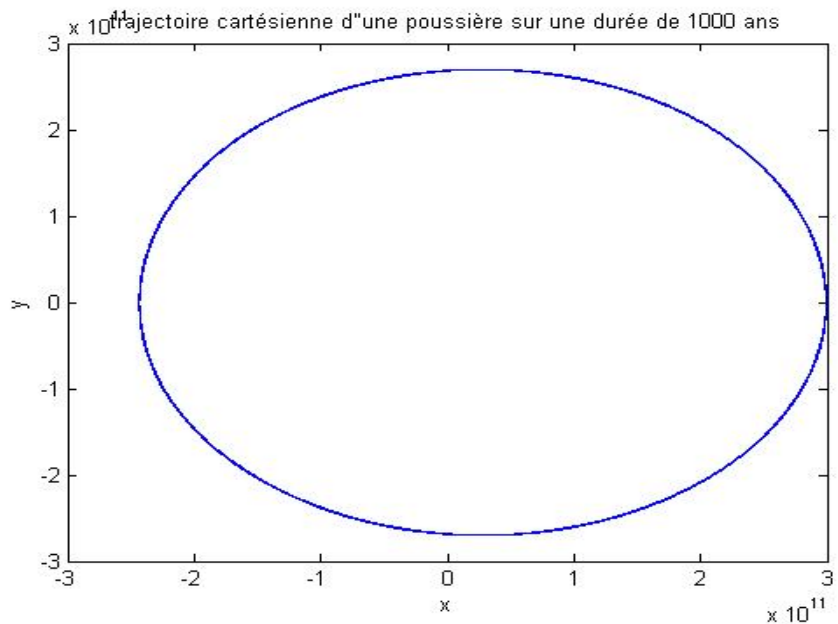
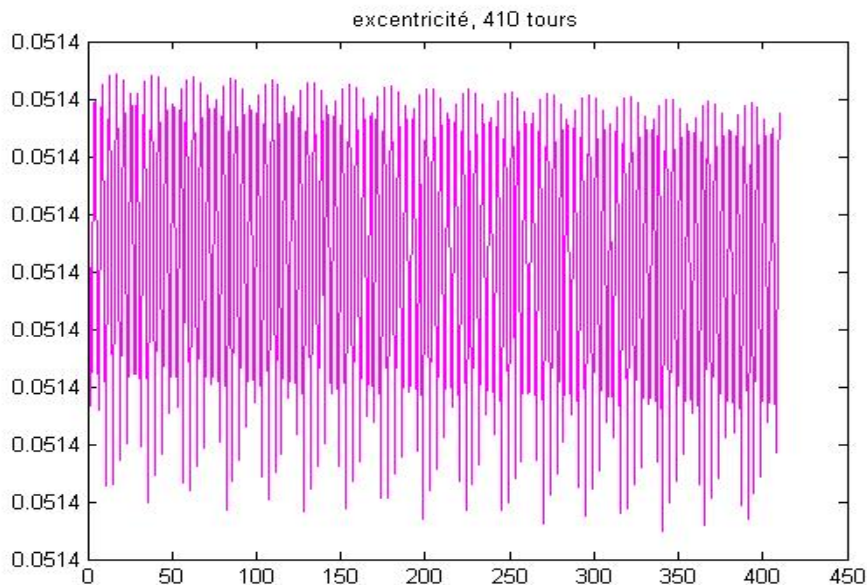


Figure 10: excentricité pour la trajectoire précédente

Les fluctuations sont nombreuses mais très faibles autour d'une excentricité constante. On avait pris $\beta=0,2$ et $v_{y0}=20000 \text{ m.s}^{-1}$. Maintenant, prenons $\beta=0$ et $v_{y0}=20000$:





Figures 11: Trajectoire et excentricité pour $\beta = 0$ et $v_{y0} = 20000 \text{ m.s}^{-1}$

On peut considérer que l'excentricité est constante. De plus on voit bien que la trajectoire est plus proche de l'étoile (origine).

Ceci montre que la pression de radiation écrante la gravitation. En effet, si la particule orbite plus loin de l'étoile dans le premier cas, c'est que le champ de gravitation est plus faible à une distance donnée pour $\beta = 0,2$ que pour $\beta = 0$. La gravité est donc bien écrantée par la force de pression de radiatoin.

3.2) Mise en évidence de l'effet Poynting-Robertson

Nous partons des mêmes conditions initiales que pour la figure 9.

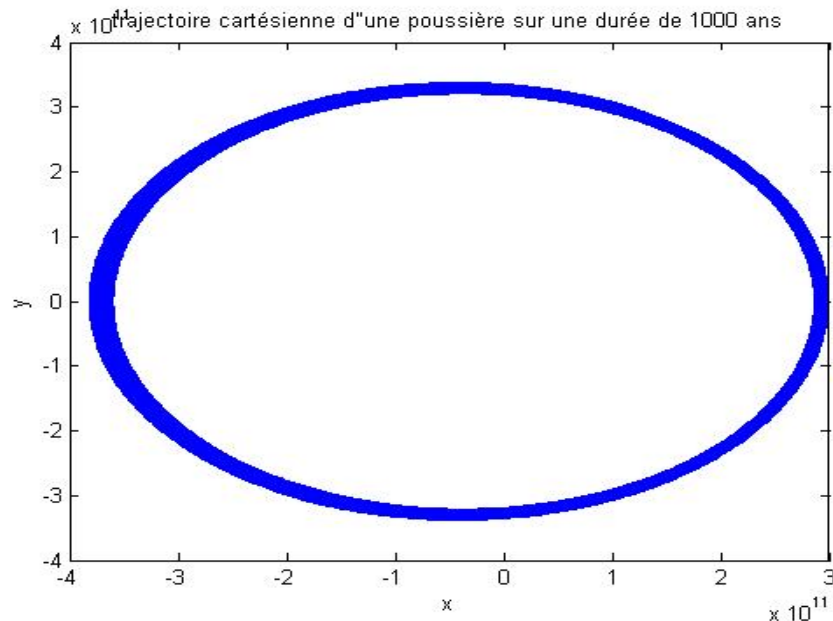
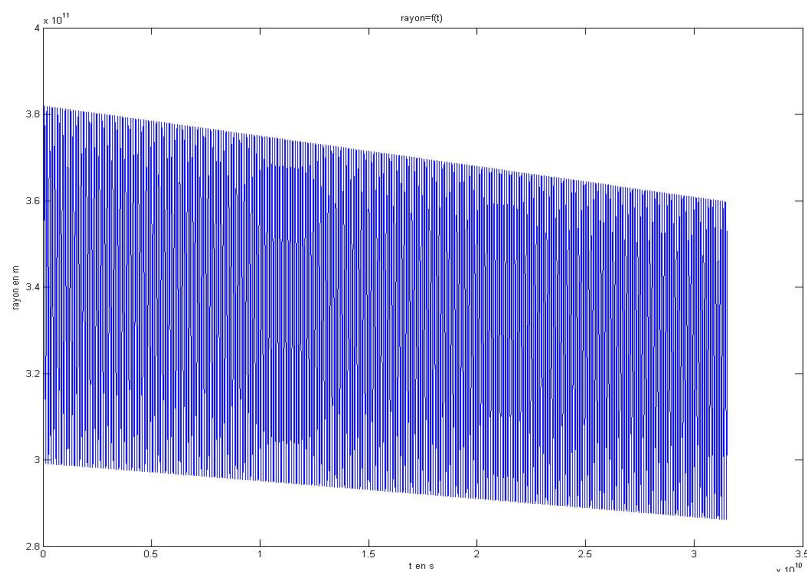
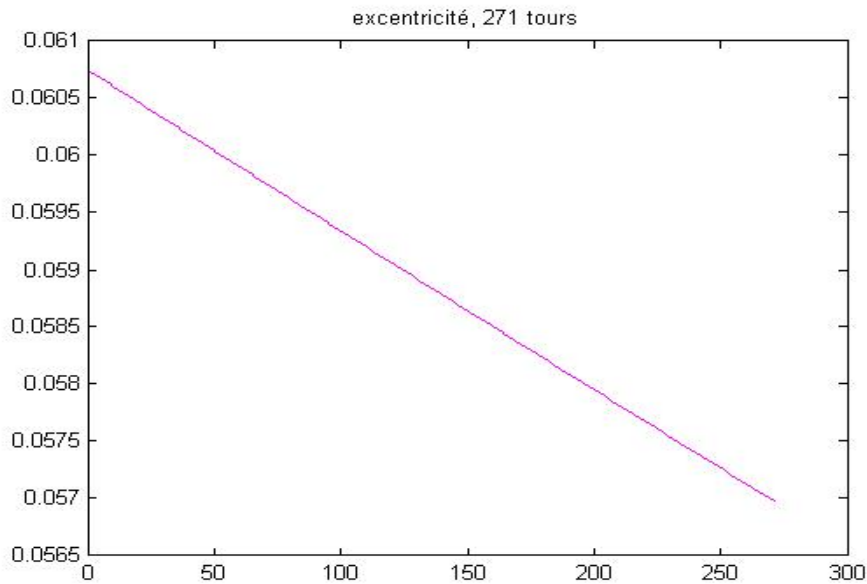


Figure 12: Trajectoire d'une particule en tenant compte de l'aberration lumineuse

On remarque l'épaisseur du trait. C'est ici que l'exploitation de l'excentricité et du rayon s'avère nécessaire. Comme on peut le voir, le rayon varie entre deux droites qui délimitent les extrema de la courbe. La tendance générale est à la diminution du rayon. Ce qui explique le trait épais. De plus, l'excentricité diminue significativement, alors que la particule n'a fait que 271 tours.

Ce que la théorie avait prévu, on le retrouve donc avec le modèle numérique : les particules soumises à la pression de radiation spiralent vers l'étoile et leur trajectoire se circularise lentement ($e \rightarrow 0$).





*Figures 13: rayon et excentricité en tenant compte de l'aberration lumineuse
pour $\beta=0,2$ et $v_{y0}=20000 \text{ m.s}^{-1}$*

On note aussi que le nombre de tours est très légèrement supérieur dans ce cas de figure. Cela montre que la pression de radiation a une composante radiale plus faible, parce qu'elle a maintenant une composante tangentielle.

3.3) Influence du paramètre β dans le cadre de l'effet Poynting-Robertson

Jusqu'ici nous avons gardé β constant pour faire nos comparaisons. Le phénomène étant mis en évidence, on peut étudier quels sont les effets obtenus en changeant β . On rappelle qu'augmenter β revient à rendre la particule plus légère ou à augmenter sa section efficace.

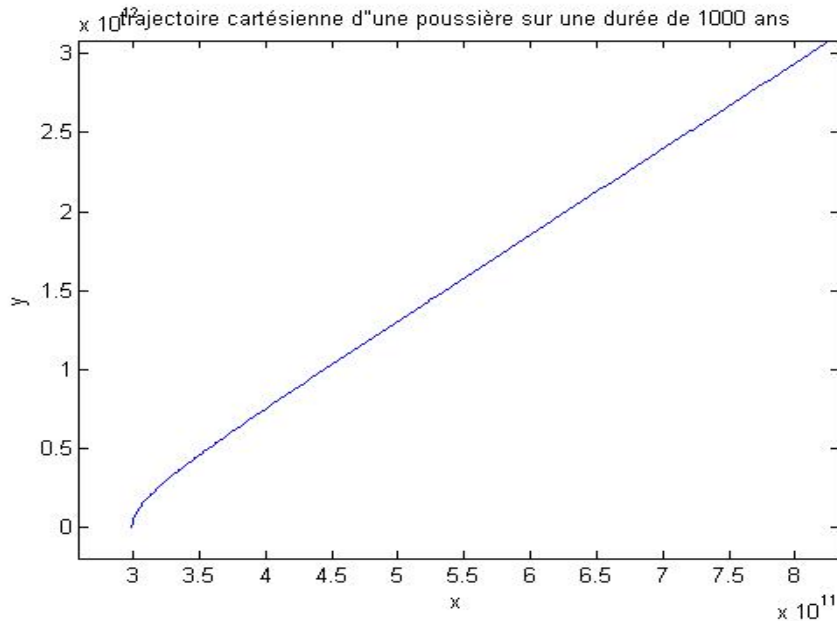


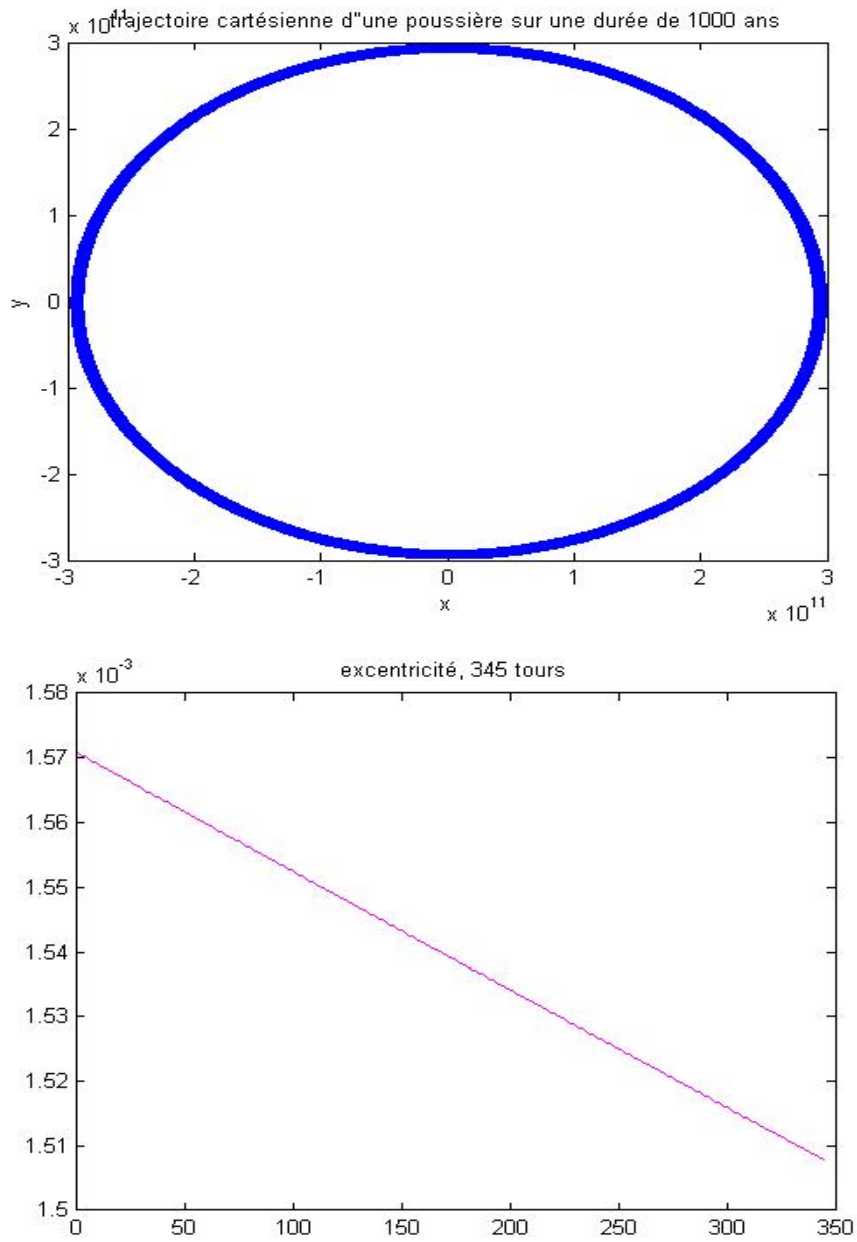
Figure 14: trajectoire pour le cas où $\beta=1,2$ et $v_{y0}=20000 \text{ m.s}^{-1}$

Comment expliquer cette trajectoire qui n'est ni hyperbolique, ni elliptique ? Et bien tout simplement par le fait qu'avec $\beta=1,2$ la pression de radiation prend le pas sur la gravitation. Au final, la particule est donc soumise à une force répulsive. Ce qui explique son éjection du système solaire.

Par ailleurs, la trajectoire obtenue n'est plus vraiment réaliste à mesure qu'on s'éloigne de l'étoile. En effet, depuis le début on suppose que β est une constante parce qu'on a supposé que la constante solaire est, comme son nom l'indique, constante. Ceci est à peu près vrai dans le système solaire. On comprendra facilement que si on s'éloigne trop de l'étoile, la constante solaire ne peut plus être considérée comme constante.

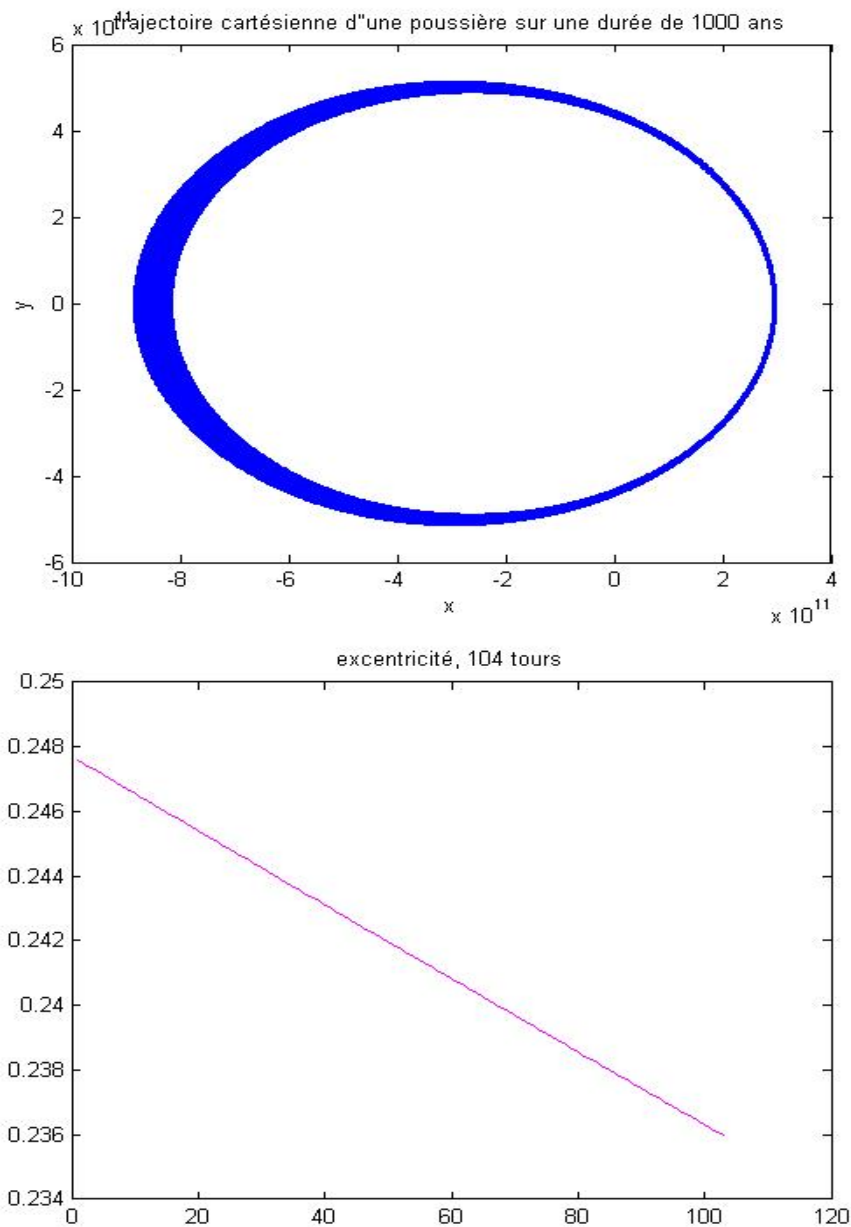
Ensuite comparons deux valeurs de β :

D'abord $\beta=0,1$:



Figures 15: $\beta=0,1$, $v_{y0}=20000m.s^{-1}$

Puis $\beta=0,4$:



Figures 16: Cas où $\beta=0,4$ et $v_{y0}=20000 \text{ m.s}^{-1}$

On a quelques différences notables.

D'abord pour le plus petit β , les ellipses sont quasiment circulaire. On voit que l'excentricité diminue tout de même dans les deux cas. Enfin la première trajectoire fait 241 tours de plus que la seconde.

On peut l'expliquer par l'écrantage plus fort du deuxième cas de figure. La pression de radiation diminue suffisamment la gravité pour que la particule se comporte comme si elle était beaucoup plus éloignée dans le système solaire. Pour une même vitesse initiale, cela rend la trajectoire plus excentrée.

3.4) Vitesse de chute

Nous avons vu que les particules soumises à l'effet Poynting-Robertson se rapprochent du soleil au cour du temps. Nous n'avons pas trouvé de moyen d'évaluer la vitesse de décroissance de l'orbite, que ce soit au niveau théorique ou numérique. Par contre on peut toujours chercher à voir au bout de combien de temps la particule devient très proche de son étoile.

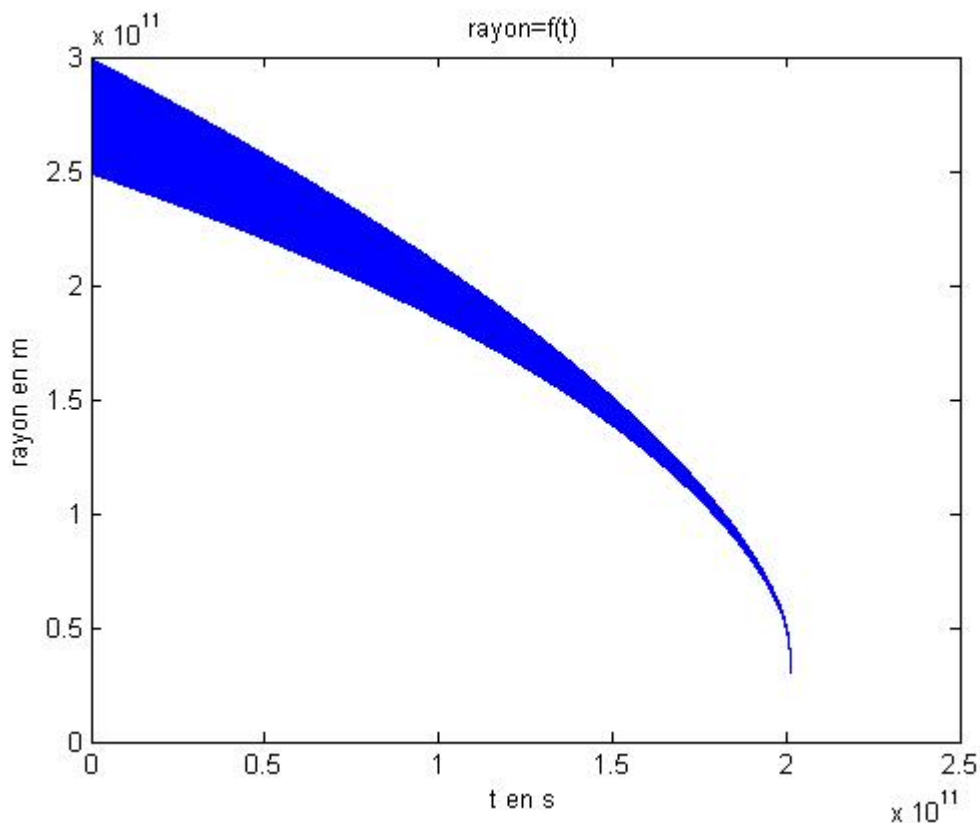
On ne pourra pas savoir exactement à quel moment la particule tombe dans le soleil, à cause des limites numériques. Mais en s'arrêtant à 0,2 UA on aura une bonne idée de la cinétique du phénomène.

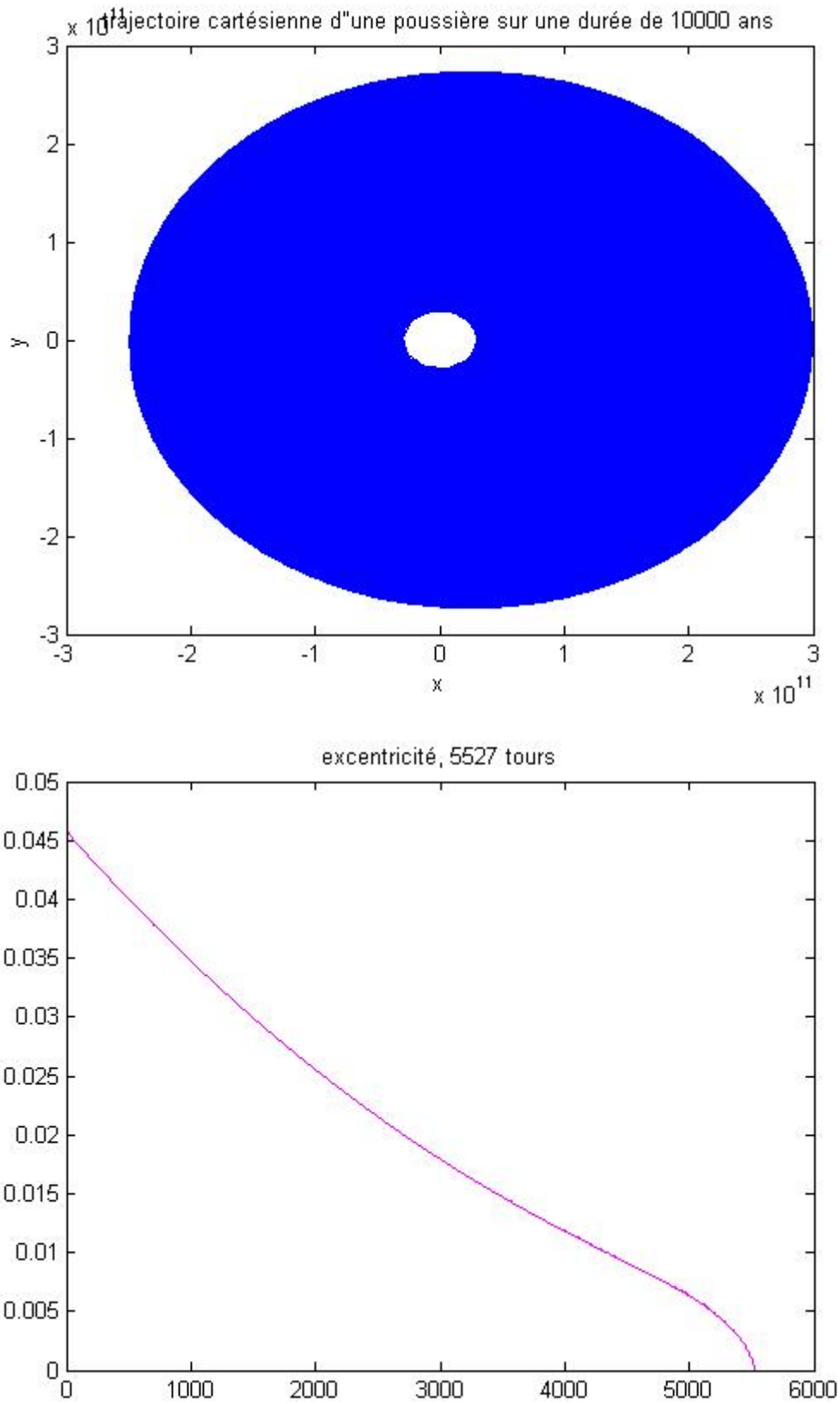
Pour cela, on intègre les équations sur des durées de plus en plus longues. Le temps d'intégration devient alors assez conséquent, car il faut augmenter le nombre de points calculés. On peut réduire cette contrainte en diminuant la vitesse initiale dans une certaine mesure.

Ici on a fait des tests avec une vitesse initiale de 18000 m.s^{-1} , 10^6 points et $\beta=0,2$.

On peut considérer qu'au bout de 10000 ans la particule est passée de 2 UA à 0,2 UA.

On obtient de jolies courbes, nous ne résistons pas à l'envie de les exposer :





Figures 17: Résultat de l'intégration sur 10000 ans, $\beta=0,2$, $v_{y_0}=18000 \text{ m.s}^{-1}$. Comme quoi la physique, c'est beau !

Notre particule a fait 5527 tours en 10000 ans, l'excentricité converge bien vers 0. D'ailleurs l'évolution de l'excentricité, qui paraissait linéaire sur de plus courtes durées, n'a vraiment pas l'air triviale.

L'idée à retenir, c'est que ce phénomène agit très lentement sur la trajectoire de la particule. L'ordre de grandeur de 10000 ans pour 2 UA, ce qui donne une décroissance d'environ 30000 km.an^{-1} , une paille à l'échelle cosmique, paraît être une bonne approximation pour la cinétique de l'effet Poynting-Robertson.

Conclusion

En guise de conclusion rappelons tout d'abord les ingrédients essentiels de l'effet Poynting-Robertson, pour cela un simple bilan des forces suffit. Dans le référentiel du Soleil, une poussière interstellaire subit l'attraction gravitationnelle du Soleil et la pression de radiation du flux de photons incidents sur la poussière. Si on ne tient compte que de ces deux forces supposées radiales mais de sens opposée, la pression de radiation écrante la gravitation du Soleil (cf 3.1). En somme tout se passe comme si la poussière était soumise à une gravitation réduite par le facteur $(1-\beta)$ (cf eq 10).

Par rapport aux prédictions théoriques sur les conséquences de l'effet Poynting-Robertson sur la dynamique d'une poussière interstellaire, il manque une force supplémentaire qui fera lentement spiraler la poussière vers le Soleil. La clef du phénomène est l'aberration de la lumière. Ainsi en tenant compte de ce phénomène et quand on l'intègre dans nos équations (cf eq 16), on rend compte de l'effet Poynting-Robertson (cf 3.2).

Ainsi nous avons pu vérifier numériquement les conséquences de l'effet Poynting-Robertson sur la dynamique de la poussière, qui ont été observées dans l'étude de la dynamique des disques de débris (cf cours de H.Beust). Nous avons pu constater que la cinétique du phénomène est très lente de l'ordre 10^4 années.

Notre travail n'a pas la prétention d'être exhaustif, bien au contraire. Nous aurions pu avec plus de temps, calculer le taux de décroissance de l'orbite, en moyennant les perturbations le long de la trajectoire. Ainsi nous aurions pu quantifier de façon plus précise, la cinétique de cet effet. Nous aurions pu modéliser le phénomène pour un petit nombre de poussières, mais par manque de temps et parce que cela nécessite beaucoup de calculs nous ne l'avons pas fait. Cette modélisation nous aurait permis de comprendre la forme des disques de débris en orbite autour d'une étoile. Mais reconnaissons le, c'est très ambitieux de notre part.

Enfin cet effet découvert il y a plus de cent ans, est encore très présent sur la scène scientifique, car il est la clef de beaucoup de phénomènes d'astrophysique, comme la formation des disques de débris autour d'une étoile ou encore l'éjection des poussières peu denses dans le système solaire.

Annexe A : La méthode de Runge-Kutta d'ordre 4

Considérons dans un premier temps la méthode des trois points, la méthode des quatre points ou RK-4 étant une variante plus précise de cette méthode.

Considérons le point $A(x_0, y_0)$, condition initiale de notre problème par exemple. Nous calculons le point $B[x_0 + \frac{h}{2}, y(x_0 + \frac{h}{2})]$ à l'aide de la méthode d'Euler :

$y(x_0 + \frac{h}{2}) = y_0 + \frac{h}{2} f(x_0, y_0)$, où h est le pas d'intégration. On détermine ensuite le point $C[x_0 + h, y(x_0 + h)]$ alors

$$(23) \quad y_1 = y(x_0 + h) = y_0 + hf[x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{h}{2} f(x_0, y_0)] .$$

$$(24) \quad \text{Finalement on a } y_1 = y_0 + \frac{h}{6}[U_0 + 4U_1 + U_2] \text{ où } U_0 = f(x_0, y_0) , \\ U_1 = f(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{h}{2} U_0) \text{ et } U_2 = f(x_0 + h, y_0 + hU_1)$$

Dans le cas où l'on choisit quatre points on aura :

$$U_0 = hf(x_0, y_0)$$

$$U_1 = hf(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{U_0}{2})$$

$$U_2 = hf(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{U_1}{2})$$

$$U_3 = hf(x_0 + h, y_0 + U_2)$$

d'où

$$(25) \quad y(x_0 + h) = y(x_0) + \frac{1}{6}[U_0 + 2U_1 + 2U_2 + U_3]$$

Mise en oeuvre sous matlab de l'algorithme de Runge-Kutta d'ordre 4.

```
y=zeros(length(t),4);
```

```
x_0 = 2*UA;  
  
y_0 = 0;  
  
vx_0 = 0;  
  
vy_0 = 20000;  
  
y(1,:) = [x_0 vx_0 y_0 vy_0];  
  
%% Résolution de l'équation différentielle  
  
for i=2:length(t)  
  
    k1=dt*fct2((i-1)*dt,y(i-1,:));  
  
    k2=dt*fct2((i-1)*dt+(dt/2),y(i-1,:)+(k1/2));  
  
    k3=dt*fct2((i-1)*dt+(dt/2),y(i-1,:)+(k2/2));  
  
    k4=dt*fct2(i*dt,y(i-1,:)+k3);  
  
    y(i,:)=y(i-1,:)+(1/6)*(k1+2*k2+2*k3+k4);  
  
end
```

On crée une matrice l par 4 où l est la taille du vecteur temps défini dans le programme. Le pas d'intégration h précédemment introduit est défini comme le pas du vecteur temps.

On définit nos conditions initiales, puis on écrit l'algorithme ci-dessus.

Annexe B : Le code Matlab

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%  
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%  
  
%% Modélisation de l'effet Poynting-Robertson sur une poussière interstellaire %%  
  
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%  
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%  
  
clear all; close all  
  
format long  
  
  
  
%% constantes  
  
global G M B c;  
  
  
duree = 1000*(365*24*3600);  
  
G = 6.67e-11;  
  
M = 2e30;  
  
B =0.4; %beta  
  
UA =1.496e11;  
  
c=3e8;  
  
%% initialisation  
  
t_debut = 0;  
  
t_fin = duree;  
  
t_0 = [t_debut t_fin];  
  
nombre_de_points = 100000; % de l'ordre de 100*(nombre d'années)  
  
dt=(t_fin-t_debut)/nombre_de_points;
```

```
t=t_debut:dt:t_fin;

y=zeros(length(t),4);

x_0 = 2*UA;

y_0 = 0;

vx_0 = 0;

vy_0 =20000;

y(1,:) = [x_0 vx_0 y_0 vy_0];

%% Résolution equation différentielle

% utiliser fct pour le cas non-relativiste et fct2 pour le cas relativiste

for i=2:length(t)

    k1=dt*fct2((i-1)*dt,y(i-1,:));

    k2=dt*fct2((i-1)*dt+(dt/2),y(i-1,:)+(k1/2));

    k3=dt*fct2((i-1)*dt+(dt/2),y(i-1,:)+(k2/2));

    k4=dt*fct2(i*dt,y(i-1,:)+k3);

    y(i,:)=y(i-1,:)+(1/6)*(k1+2*k2+2*k3+k4);

end

ray=sqrt(y(:,1).^2+y(:,3).^2);

%% traitement

%troncature pour éviter les instabilités quand on est trop près de l'origine

l=1;

while sqrt(y(l,1)^2+y(l,3)^2)>0.2*UA

    l=l+1;

    if (l==length(y))
```

```
        break;

    end

end

y = y(1:l,:);

t = t(1:l);

% Calcul de l'excentricité

j=0;l=0;

r1(1)=0;

r2=r1;

for k=2:length(ray)-1

    if (ray(k-1)>ray(k) && ray(k+1)>ray(k))

        j=j+1;

        r1(j)=ray(k);

    end

    if (ray(k-1)<ray(k) && ray(k+1)<ray(k))

        l=l+1;

        r2(l)=ray(k);

    end

end

if j>l

    r1=r1(1:l);

end

if l>j

    r2=r2(1:j);

end
```

```
e=zeros(1,length(r1));

a=e;

c=e;

for k=1:length(r1)

    a(k)=(r1(k)+r2(k))/2;

    c(k)=(a(k)-r1(k))/2;

    e(k)=c(k)/a(k);

end

%% graphisme

ray=sqrt(y(:,1).^2+y(:,3).^2);

figure(1)

plot(t,ray);

title('rayon=f(t)');

xlabel('t en s');

ylabel('rayon en m')

figure(2)

plot(y(:,1),y(:,3),'b');

title(['trajectoire cartésienne d"une poussière sur une durée de ',num2str(duree/(3600*24*365)),' ans'])

xlabel('x')

ylabel('y')

figure(3)

plot(e,'m')

title(['excentricité, ',num2str(l),' tours'])
```

Bibliographie

J.H Poynting 1903, « Radiation in the solar system : its effect on temperature and its pressure on small bodies » in *Monthly Notices of the Royal astronomical Society*

H.P Robertson 1937, « Dynamical effects of radiation in the solar system »

J Klačka 1992, « Poynting-Robertson effect »

J Klačka and I.P Williams 2002, « The Poynting-Robertson effect and the relevance of radiation force to meteoroid streams »

J Klačka 2005, « Aberration of light and motion of real particule »

H. Beust 2005, « Modélisation des disques de débris », Cours donné à l'école de Goutelas.

C. Guilpin, *Manuel de calcul numérique appliqué*, EDP Sciences

J.Ph. Pérez, *Mécanique*, Masson

l'encyclopédie en ligne wikipedia.

Remerciements :

Nous tenons à remercier Hervé Beust, astronome adjoint du laboratoire d'astrophysique de Grenoble, pour avoir répondu à nos questions et pour nous avoir conforté dans notre démarche scientifique.