

Les faisceaux gaussiens:  
caractéristiques et propagation:

Michel Fabrice

Décembre 2002

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction :</b>	<b>3</b>
1.1	Motivation : . . . . .	3
1.2	Rappel : . . . . .	3
1.3	Faisceau gaussien : . . . . .	3
<b>2</b>	<b>Flux d'un faisceau gaussien :</b>	<b>5</b>
2.1	Distribution transversale du flux et "définitions de $\omega$ " : . . . . .	5
2.2	Flux total : . . . . .	5
2.3	Premières conclusions : . . . . .	6
<b>3</b>	<b>Propagation du faisceau gaussien :</b>	<b>7</b>
3.1	Paramètres d'un faisceau gaussien : . . . . .	7
3.2	Distribution longitudinale de $\omega(z)$ : . . . . .	8
3.3	Elargissement du faisceau : . . . . .	8
3.4	Phase des faisceaux gaussiens : . . . . .	9
3.5	Distribution longitudinale du flux : . . . . .	9
3.6	Résumé : . . . . .	9
<b>4</b>	<b>Faisceau gaussien et faisceau sphérique :</b>	<b>10</b>
4.1	Rappel sur les ondes sphériques : . . . . .	10
4.2	Rayon équivalent : . . . . .	10
4.3	Propagation d'une onde sphérique : . . . . .	11
4.4	Propagation d'une onde gaussienne : . . . . .	12
4.5	Relations homographiques pour les gaussiennes : . . . . .	12
4.6	Applications : . . . . .	13
4.6.1	Condition pour que $\omega_{0,s}$ soit le conjugué de $\omega_{0,e}$ : . . . . .	13
4.6.2	Cas d'une lentille mince plongée dans l'air : . . . . .	13
4.6.3	Cas d'une lame à faces parallèles d'épaisseur $e$ d'indice $n$ et plongée dans l'air : . . . . .	14
4.6.4	Cas d'un miroir sphérique de rayon de courbure $R$ et plongé dans l'air : . . . . .	14

<b>5</b>	<b>Faisceau de Bessel :</b>	<b>15</b>
5.1	Définition :	15
5.2	Propagation d'un faisceau de Bessel :	16
5.3	Comparaisons avec un faisceau gaussien :	16
5.4	Lien entre un faisceau gaussien et un faisceau de Bessel :	16
<b>6</b>	<b>Formulaire :</b>	<b>17</b>
<b>7</b>	<b>Annexes :</b>	<b>19</b>
7.1	Annexe A : "Définition" de $\omega$ :	19
7.2	Annexe B : Modes $TEM_{nm}$ :	21
7.3	Annexe C : Forme générale d'une onde gaussienne :	22
7.4	Annexe D : Expression de $q$ en fonction de $z_R$ :	23
7.5	Annexe E : Propagation d'une onde sphérique : Règle $abcd$ :	24
7.6	Annexe F : Fonction de Bessel :	25
7.7	Annexe G : Solutions de l'équation d'Helmholtz :	26
<b>8</b>	<b>Bibliographie :</b>	<b>27</b>

# Chapitre 1

## Introduction :

### 1.1 Motivation :

L'étude des faisceaux gaussiens s'avère nécessaire car la plupart des lasers émettent de tels faisceaux.

### 1.2 Rappel :

Ci dessous, je vous rappelle la forme analytique d'une gaussienne normalisée, centrée en  $x_0$  et d'écart-type  $\sigma$  :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \cdot \exp\left(-\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{x - x_0}{\sigma}\right)^2\right). \quad (1.1)$$

### 1.3 Faisceau gaussien :

- On considérera tout au long du rapport que l'on travaille avec une onde électromagnétique monochromatique et plane se propageant le long de l'axe  $oz$  :

$$\psi(x, y, z) = A(x, y, z) \cdot \exp(ikz) = A(\rho, z) \cdot \exp(ikz). \quad (1.2)$$

$$\rho = (x^2 + y^2)^{1/2}. \quad (1.3)$$

$\rho$  représente la distance à l'axe  $oz$ .

Le faisceau sera dit *gaussien*<sup>1</sup> si :

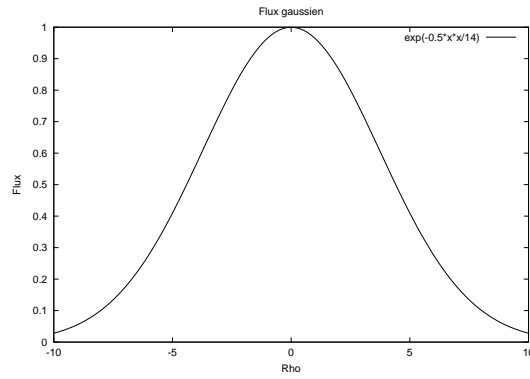
$$A(\rho, z) = A_0(z) \cdot \exp\left(\frac{-\rho^2}{\omega(z)^2}\right) \quad (1.4)$$

---

<sup>1</sup> $A_0(z)$  correspond à l'amplitude en  $\rho = 0$  au point de coordonnée  $z$ .

$\omega$  est une distance<sup>2</sup> : elle est appelée *le rayon de la section droite du faisceau gaussien*, dans le plan de front de coordonnée<sup>3</sup>  $z$ .

Ce mode de distribution transversale est appelé *le mode*<sup>4</sup>  $TEM_{00}$ .



---

<sup>2</sup>En effet l'exponentielle ne peut pas avoir d'unité.

<sup>3</sup> $\omega$  est une fonction de  $z$  : voir "*Distribution longitudinale de  $\omega(z)$* ".

<sup>4</sup>d'autres modes sont représentés en Annexe B.

# Chapitre 2

## Flux d'un faisceau gaussien :

### 2.1 Distribution transversale du flux et "définitions de $\omega$ " :

Plaçons nous dans un plan perpendiculaire à l'axe optique oz. Dans ce plan, le flux lumineux n'est pas homogène. Il varie selon une loi gaussienne en fonction de  $\rho$ <sup>1</sup> :

$$\Phi(\rho) = \Phi_0 \cdot \exp\left(\frac{-2\rho^2}{\omega^2}\right) \quad (2.1)$$

Vu cette dernière équation,  $\omega$  peut être définie<sup>2</sup> comme :

$$\Phi(\rho = \omega) = \frac{\Phi_0}{e^2}. \quad (2.2)$$

$\omega$  peut aussi se définir en fonction de la largeur à mi-hauteur ( $\Delta\rho_{1/2}$ ) de la distribution :

$$\omega = (2\ln 2)^{-1/2} \cdot \Delta\rho_{1/2} \quad (2.3)$$

### 2.2 Flux total :

On se place dans un plan perpendiculaire à l'axe optique. Calculons le flux total  $\Phi_t$ <sup>3</sup> reçu par ce plan en tenant compte de la symétrie circulaire du faisceau :

$$\Phi_t = \int_0^{+\infty} \Phi(\rho) \cdot 2\pi\rho \cdot d\rho \quad (2.4)$$

---

<sup>1</sup>En effet, le flux est proportionnel au carré de l'amplitude du champ. Et l'amplitude suit l'équation (1.4). On note :  $\Phi_0 = A_0^2$ .

<sup>2</sup>Cfr. Annexe A.

<sup>3</sup>Le flux total est conservé vu la conservation de l'énergie.

Après avoir remplacé  $\Phi(\rho)$  par l'équation (2.1) et après intégration, on obtient :

$$\Phi_t = \Phi_0 \frac{\pi\omega^2}{2} \quad (2.5)$$

En inversant la relation et en utilisant l'équation (2.1) :

$$\Phi(\rho) = \frac{2\Phi_t}{\pi\omega^2} \cdot \exp\left(\frac{-2\rho^2}{\omega^2}\right) \quad (2.6)$$

Maintenant, comparons le flux total reçu par le plan au flux  $\Phi_1$  reçu par un disque de rayon  $\rho_1$  appartenant au plan et centré sur l'axe :

$$\Phi_1 = \int_0^{\rho_1} \Phi(\rho) \cdot 2\pi\rho d\rho \quad (2.7)$$

Ce qui donne, en utilisant la même méthode que précédemment :

$$\frac{\Phi_1}{\Phi_t} = 1 - \exp\left(\frac{-2\rho_1^2}{\omega^2}\right) \quad (2.8)$$

### Ordre de grandeur :

- Pour un cercle de rayon  $\rho_1 = \omega$  :  
86/100 du flux total reçu par le plan est contenu dans ce cercle de rayon  $\omega$ .

- Dans le cas où  $\rho_1 = 2\omega$  :  
le cercle contient 99,9/100 du flux total.

## 2.3 Premières conclusions :

Pour un faisceau gaussien, la connaissance de  $\omega$ <sup>4</sup> permet de déterminer :

- $\Phi(\rho)$  par l'équation (2.1) ;
- le flux total du faisceau grâce à l'équation (2.4) ;
- le rayon du cercle (perpendiculaire et centré sur l'axe optique) qui contient 99,9/100 du flux total.

---

<sup>4</sup>Ceci est possible expérimentalement : cfr. annexe A.

# Chapitre 3

## Propagation du faisceau gaussien :

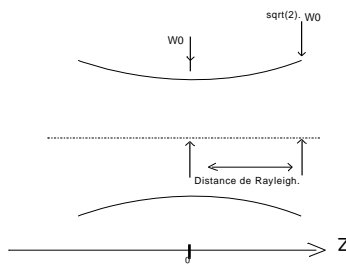
### 3.1 Paramètres d'un faisceau gaussien :

On définit  $\omega_0$  comme étant la valeur minimale <sup>1</sup> du rayon du faisceau.  $\omega_0$  est appelé "le waist" ou "cercle de gorge". La position  $z$  de  $\omega_0$  définit l'origine de l'axe  $oz$ .

On définit aussi la *longueur de Rayleigh*,  $z_r$  <sup>2</sup> définie par :

$$z_r = \frac{\pi\omega_0^2}{\lambda}. \quad (3.1)$$

On verra plus tard <sup>3</sup>, qu'elle correspond à la distance après laquelle le rayon s'est élargi d'un facteur  $\sqrt{2}$  par rapport au "waist".



---

<sup>1</sup>On verra au paragraphe 3.2 que le rayon du faisceau augmente au cours de sa propagation. Pour un laser, la taille de  $\omega_0$  dépend de la géométrie de la cavité.

<sup>2</sup> $\omega_0$  et  $z_R$  sont deux constantes qui caractérisent le faisceau gaussien.

<sup>3</sup>Voir équation (3.2)

### 3.2 Distribution longitudinale de $\omega(z)$ :

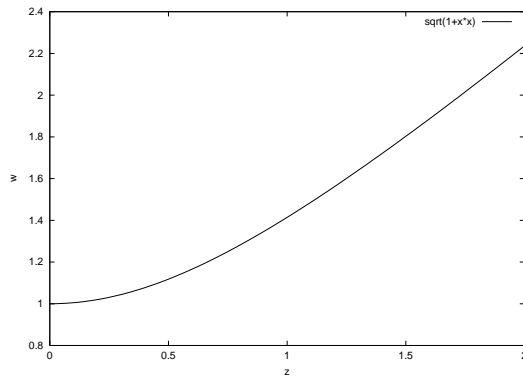
Il est possible de déterminer la loi suivante :

$$\omega(z) = \omega_0 \left( 1 + \frac{z^2}{z_r^2} \right)^{1/2} \quad (3.2)$$

Et si  $z \gg z_r$  :

$$\omega(z) \approx \omega_0 \cdot \frac{z}{z_r} = \frac{\lambda z}{\pi \omega_0} \quad (3.3)$$

Ceci nous montre donc que le rayon du faisceau à une distribution hyperbolique aux petits  $z$  et qu'il augmente ensuite de manière linéaire aux grands  $z$ . Un faisceau gaussien s'élargit donc au cours de sa propagation.



### 3.3 Elargissement du faisceau :

Lorsque l'on trace le graphique de  $\omega$  en fonction de  $z$ , on obtient une partie hyperbolique et une partie linéaire. La pente de la partie linéaire nous donne la divergence  $\theta_0$  du faisceau :

$$\tan(\theta_0) = \lim_{z \rightarrow \infty} \left( \frac{\omega}{z} \right) = \frac{\omega_0}{z_r} = \frac{\lambda}{\pi \omega_0} \quad (3.4)$$

Or l'angle  $\theta_0$  est petit, donc :

$$\theta_0 \approx \frac{\lambda}{\pi \omega_0} \quad (3.5)$$

#### Ordre de grandeur :

Pour un laser He-Ne ( $\lambda = 632,8 \text{ nm}$ ) de diamètre minimal 1,3 mm :  $\theta \approx 1'$ .

### 3.4 Phase des faisceaux gaussiens :

En comparant la forme générale <sup>4</sup> de  $\Psi(\rho)$  avec celle d'une onde plane, on constate que la phase d'un faisceau gaussien diffère de la phase d'une onde plane par le terme :

$$\phi(z) = -\arctan\left(\frac{z}{z_R}\right). \quad (3.6)$$

On constate que le déphasage dépend de la coordonnée  $z$ .

Ainsi, si  $z > 0$  :  $\phi < 0$ , l'onde gaussienne est en avance de phase par rapport à l'onde monochromatique plane associée.

Et si  $z < 0$  :  $\phi > 0$  l'onde est en retard.

Le déphasage entre ces deux ondes peut varier dans  $]-\infty, +\infty [$ .

### 3.5 Distribution longitudinale du flux :

On a conservation du flux total. Ce qui implique par l'équation (2.4) que l'aire sous la courbe de  $\Phi(\rho)$  est constante.

Or le long de  $z$ , la gaussienne  $\Phi(\rho)$  s'étale <sup>5</sup>.

Ce qui signifie <sup>6</sup> une diminution de  $\Phi_0$  le long de  $z$  :

$$\Phi(\rho, z) = \frac{A^2}{1 + z^2/z_R^2} \cdot \exp\left(-2\frac{\rho^2}{\omega(z)^2}\right). \quad (3.7)$$

Cette formule est obtenue en prenant le carré de la forme générale de  $\psi(\rho)$ . Cette forme générale étant reprise en annexe C.

### 3.6 Résumé :

Un définit un nouveau paramètre pour les faisceaux gaussiens : la longueur de Rayleigh  $z_R$ .

Un faisceau gaussien s'élargit de manière linéaire quand on est éloigné au moins de  $z_R$  de  $\omega_0$ .

Ceci a pour conséquence que  $\Phi(\rho)$  dépend de la coordonnée  $z$ .

---

<sup>4</sup>Cfr. Annexe C.

<sup>5</sup>En effet,  $\omega(z)$  augmente le long de  $z$ .

<sup>6</sup>Ce résultat peut aussi être vu par l'équation (2.5)

# Chapitre 4

## Faisceau gaussien et faisceau sphérique :

### 4.1 Rappel sur les ondes sphériques :

Une onde lumineuse monochromatique, sphérique et divergente, dont la source est placée en  $O$  se caractérise par une onde au point  $M$  :

$$\psi_s(r) = \frac{C}{r} \cdot \exp(ikr) \quad (4.1)$$

Avec  $r = \|\vec{OM}\|$ . Or dans notre cas,  $x^2 + y^2 \ll z^2$ , ce qui permet de réécrire<sup>1</sup>  $\psi_s(r)$  dans l'approximation dite *binomiale* :

$$\psi_s(\rho, z) = \frac{C}{z} \cdot \exp(ikz) \cdot \exp\left(i\frac{\pi\rho^2}{\lambda z}\right) \quad (4.2)$$

$z$  représente, dans le cas d'une onde sphérique d'origine  $O$ , le rayon de courbure.

### 4.2 Rayon équivalent :

A partir de l'équation (4.2) et de la forme générale<sup>2</sup> de l'amplitude d'une onde gaussienne, on peut montrer qu'un faisceau gaussien est vu comme une onde sphérique dont le rayon de courbure est égal à  $q$  si :

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{R} + i\frac{1}{\zeta} \quad (4.3)$$

---

<sup>1</sup> $r \approx z + \frac{x^2+y^2}{2z} \approx z + \frac{\rho^2}{2z}$ .

<sup>2</sup>Cfr. annexe C.

$$\zeta = \frac{\pi\omega^2}{\lambda} \quad (4.4)$$

$$R = z. \left[ 1 + \frac{z_R^2}{z^2} \right] \quad (4.5)$$

Ce qui peut se réécrire <sup>3</sup> :

$$q = z - iz_R \quad (4.6)$$

On retiend plutôt cette dernière équation vu sa simplicité.

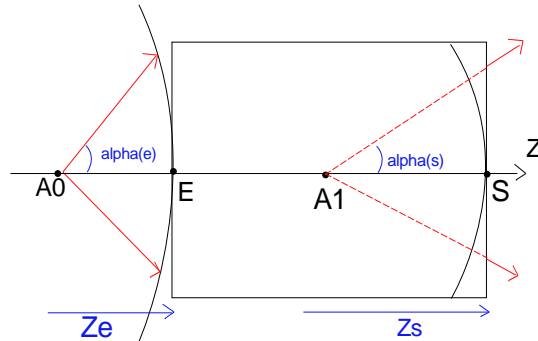
$q$  est appelé *paramètre du faisceau gaussien*.

On remarque que  $q$  est une fonction de  $z$ .

### 4.3 Propagation d'une onde sphérique :

Au point de vue ondulatoire, un instrument optique stigmatique transforme une onde sphérique incidente en une onde sphérique émergente mais de rayon de courbure différent.

Soient  $A_o$  émettant une onde sphérique et  $A_i$  son image par un système optique.



Soit la matrice de transfert de ce système optique :

$$T(ES) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad (4.7)$$

Du coup, par calcul matriciel, on démontre <sup>4</sup> que :

$$\frac{\bar{R}_s}{n_s} = \frac{a\bar{R}_e/n_e + b}{c\bar{R}_e/n_e + d} \quad (4.8)$$

<sup>3</sup>Cfr. Annexe D.

<sup>4</sup>Cfr. Annexe E.

Avec  $\overline{R}_e$ , le rayon de courbure du front d'onde incident et  $\overline{R}_s$ , celui du front d'onde émergent du système optique.

Cette règle 4.8 est appelée *règle abcd*.

## 4.4 Propagation d'une onde gaussienne :

On a vu qu'une onde gaussienne peut être considérée comme une onde sphérique de rayon de courbure  $q$ . Du coup, on remplace  $\overline{R}_e$  par  $q_e$  et  $\overline{R}_s$  par  $q_s$  dans la règle *abcd* pour obtenir son équivalent pour les faisceaux gaussiens.

C'est à dire :

$$\frac{q_s}{n_s} = \frac{aq_e/n_e + b}{cq_e/n_e + d} \quad (4.9)$$

Avec  $q_s = z_s - iz_{R,s}$  et  $q_e = z_e - iz_{R,e}$  ; paramètres respectifs des faisceaux incident et émergent.

## 4.5 Relations homographiques pour les gaussiennes :

Un système optique transforme un faisceau gaussien incident de *waist*  $\omega_{0,e}$  en un autre faisceau de *waist*  $\omega_{0,s}$ .

Essayons de déterminer le lien entre ces deux faisceaux sachant que la matrice de transfert du système optique s'écrit :

$$T(ES) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad (4.10)$$

Pour ce faire, remplaçons dans la relation (4.9)  $q_e$  et  $q_s$  par leur définition. En séparant les parties réelle et imaginaire et en tenant compte du fait que  $ad-bc = 1$ , on trouve les relations homographiques suivantes :

$$\begin{cases} \frac{z_s}{n_s} = \frac{(az_e/n_e + b)(cz_e/n_e + d) + acz_{R,e}^2/n_e^2}{(cz_e/n_e + d)^2 + c^2z_{R,e}^2/n_e^2} \\ \frac{z_{R,s}}{n_s} = \frac{z_{R,e}/n_e}{(cz_e/n_e + d)^2 + c^2z_{R,e}^2/n_e^2} \end{cases} \quad (4.11)$$

## 4.6 Applications :

### 4.6.1 Condition pour que $\omega_{0,s}$ soit le conjugué de $\omega_{0,e}$ :

Regardons dans quel cas,  $\omega_{0,e}$  et  $\omega_{0,s}$  sont dans des plans conjugués. Dans ce cas, la matrice de transfert s'écrira :

$$T(\overline{A_e A_s}) = \begin{pmatrix} G_t & 0 \\ -V & G_t^{-1} \end{pmatrix} \quad (4.12)$$

Il en résulte vu l'équation (4.9) :

$$\frac{q_s}{n_s} = \frac{G_t q_e / n_e}{-V q_e / n_e + G_t^{-1}} \quad (4.13)$$

Ce qui donne, car  $z_e$  et  $z_s = 0$  :

$$\frac{-i z_{R,s}}{n_s} = \frac{-i G_t z_{R,e} / n_e}{i V z_{R,e} / n_e + G_t^{-1}} \quad (4.14)$$

Ce qui implique que  $V = 0$  (système afocal), car  $z_{R,e}$  et  $z_{R,s}$  sont des nombres réels.

### 4.6.2 Cas d'une lentille mince plongée dans l'air :

Matrice de transfert :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{pmatrix} \quad (4.15)$$

En introduisant cette matrice dans les relations homographiques, on montre que :

$$-\frac{1}{z_s} + \frac{1}{z_e} = \frac{1}{f} \quad (4.16)$$

Ceci est en accord avec les relations de Descartes de l'optique géométrique si :  $z_s = -p_i$  et  $z_e = -p_0$ .

On constate aussi que si  $\omega_{0,e}$  est dans le plan focal objet, alors le waist de sortie est dans le plan focal image.

### Ordre de grandeur :

Soit une lentille de focale 20cm éclairée par un faisceau gaussien de 632,8nm et de waist 0,5mm situé à 25cm en devant la lentille.

On trouve :  $z_s \approx -0,2m$  : le waist émergent est situé 20cm derrière la lentille.

### 4.6.3 Cas d'une lame à faces parallèles d'épaisseur $e$ d'indice $n$ et plongée dans l'air :

Les éléments de la matrice de transfert sont :

$$a = 1; b = e/n; c = 0; d = 1$$

On obtient, vu (4.9), la relation :

$$q_s = q_e + \frac{e}{n}. \quad (4.17)$$

### 4.6.4 Cas d'un miroir sphérique de rayon de courbure $R$ et plongé dans l'air :

Dans ce cas, les éléments de la matrice de transfert sont :

$$a = 1; b = 0; c = -V = 2/R; d = 1$$

Dans ces conditions, on peut réécrire le loi  $abcd$  sous la forme :

$$-\frac{1}{q_s} + \frac{1}{q_e} = V = -\frac{2}{R} \quad (4.18)$$

Il en résulte en séparant les parties réelle et imaginaire :

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{1}{R_s} + \frac{1}{R_e} = -\frac{2}{R} \\ \zeta_s = \zeta_e \end{array} \right. \quad (4.19)$$

Ce qui signifie :

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{1}{z_s} + \frac{1}{z_e} = -\frac{2}{R} \\ \omega_s = \omega_e \end{array} \right. \quad (4.20)$$

On remarque de nouveau que l'on retrouve les lois habituelles de l'optique géométrique si :

$$z_s = -p_i \text{ et } z_e = -p_0.$$

De plus, pour un miroir plan ( $R \rightarrow \infty$ ),  $R_e = R_s$ .

# Chapitre 5

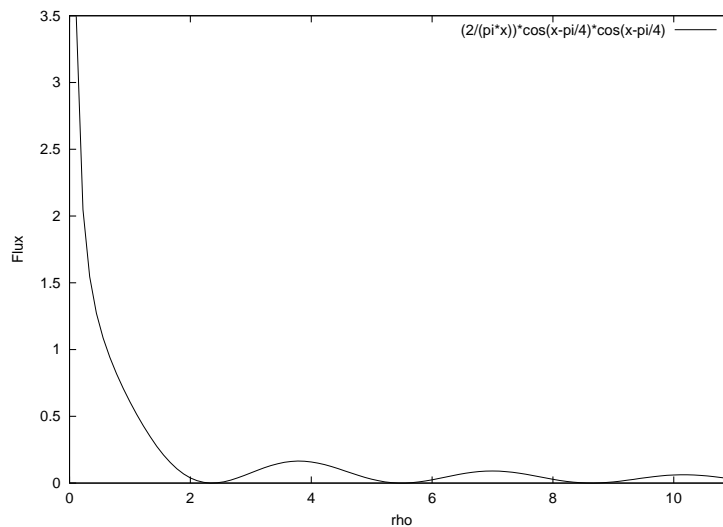
## Faisceau de Bessel :

### 5.1 Définition :

Un faisceau de Bessel est un faisceau pour lequel l'amplitude est distribuée selon  $\rho$  comme une fonction de Bessel d'ordre 0. Ce qui revient à dire au point de vue du flux :

$$\Phi(\rho) = A_0^2 \cdot J_0^2(k_T \rho). \quad (5.1)$$

Où  $J_0(\cdot)$  est la fonction de Bessel <sup>1</sup> à l'ordre 0.



---

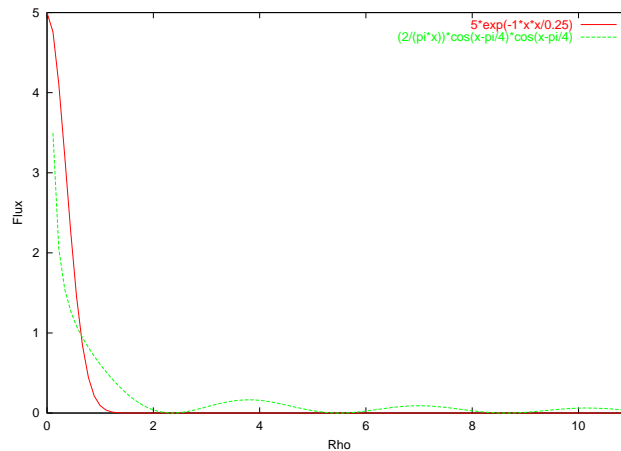
<sup>1</sup>Cfr. Annexe F.

## 5.2 Propagation d'un faisceau de Bessel :

$\Phi(\rho)$  est indépendant de  $z$  : un faisceau de Bessel ne diverge pas contrairement aux autres faisceaux.

## 5.3 Comparaisons avec un faisceau gaussien :

- Le flux d'un faisceau gaussien décroît de manière exponentielle tandis que pour un faisceau de Bessel, le flux est proportionnel à une fonction périodique : on détectera plusieurs extrêmes dans un faisceau de Bessel :



- La largeur à mi-hauteur d'un faisceau gaussien est finie et dépendante de  $z$  :  $\Delta\rho_{1/2} = 1,177 \cdot \omega(z)$ . Par contre, pour un faisceau de Bessel, cette largeur à mi-hauteur est infinie.

## 5.4 Lien entre un faisceau gaussien et un faisceau de Bessel :

Sous approximation, un faisceau gaussien est un faisceau de Bessel <sup>2</sup>.

En effet, l'expression de l'onde d'un faisceau de Bessel est une solution *exacte* de l'équation de Helmholtz<sup>3</sup>. Tandis que l'expression de l'onde gaussienne n'est qu'une solution *approchée* de cette même équation.

---

<sup>2</sup>Il est possible de s'en convaincre en observant la figure reprise dans le paragraphe (5.3).

<sup>3</sup>Cfr. Annexe G.

# Chapitre 6

## Formulaire :

Ci dessous, je reprends toutes les formules utiles.

### Onde gaussienne :

$$\psi(x, y, z) = A(x, y, z).exp(ikz) = A(\rho, z).exp(ikz). \quad (6.1)$$

$$A(\rho, z) = A_0(z).exp\left(\frac{-\rho^2}{\omega(z)^2}\right) \quad (6.2)$$

### Flux du faisceau :

$$\Phi(\rho) = \Phi_0.exp\left(\frac{-2\rho^2}{\omega^2}\right) \quad (6.3)$$

$$\Phi_t = \int_0^{+\infty} \Phi(\rho).2\pi\rho d\rho = \Phi_0 \frac{\pi\omega^2}{2} \quad (6.4)$$

$$\Phi(\rho, z) = \frac{A^2}{1 + z^2/z_R^2}.exp\left[-2\frac{\rho^2}{\omega(z)^2}\right]. \quad (6.5)$$

### Paramètres géométriques :

$$z_r = \frac{\pi\omega_0^2}{\lambda}. \quad (6.6)$$

$$\omega = \omega_0 \left(1 + \frac{z^2}{z_r^2}\right)^{1/2} \approx \frac{\lambda z}{\pi\omega_0} \quad (6.7)$$

**Onde sphérique dans l'approximation binomiale :**

$$\psi_s(\rho, z) = \frac{C}{z} \cdot \exp(ikz) \cdot \exp\left[i\frac{\pi\rho^2}{\lambda z}\right] \quad (6.8)$$

**Rayon équivalent :**

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{R} + i\frac{1}{\zeta} \quad (6.9)$$

$$\zeta = \frac{\pi\omega^2}{\lambda} \quad (6.10)$$

$$R = z \cdot \left(1 + \frac{z_R^2}{z^2}\right) \quad (6.11)$$

$$q = z - iz_R \quad (6.12)$$

**Propagation d'un faisceau gaussien :**

$$\frac{q_s}{n_s} = \frac{aq_e/n_e + b}{cq_e/n_e + d} \quad (6.13)$$

$$q_s = z_s - iz_{R,s} \quad (6.14)$$

$$q_e = z_e - iz_{R,e}. \quad (6.15)$$

**Relations homographiques pour ondes gaussiennes :**

$$\begin{cases} \frac{z_s}{n_s} = \frac{(az_e/n_e + b) \cdot (cz_e/n_e + d) + acz_{R,e}^2/n_e^2}{(cz_e/n_e + d)^2 + c^2z_{R,e}^2/n_e^2} \\ \frac{z_{R,s}}{n_s} = \frac{z_{R,e}/n_e}{(cz_e/n_e + d)^2 + c^2z_{R,e}^2/n_e^2} \end{cases} \quad (6.16)$$

**Faisceau de Bessel :**

$$\Phi(\rho) = A_0^2 \cdot J_0^2(k_T \rho). \quad (6.17)$$

# Chapitre 7

## Annexes :

### 7.1 Annexe A : "Définition" de $\omega$ :

$$\Phi(\rho) = \Phi_0 \cdot \exp\left(\frac{-2\rho^2}{\omega^2}\right) \quad (7.1)$$

Ce qui implique :

$$\omega^2 = \frac{2\rho^2}{\ln\left[\frac{\Phi_0}{\Phi(\rho)}\right]} \quad (7.2)$$

Plaçons nous à une distance  $\rho = \omega$  de l'axe optique oz <sup>1</sup> :

$$\omega^2 = \frac{2\omega^2}{\ln\left[\frac{\Phi_0}{\Phi(\rho=\omega)}\right]} \quad (7.3)$$

On trouve ainsi :

$$\ln\left[\frac{\Phi_0}{\Phi(\rho=\omega)}\right] = 2 \quad (7.4)$$

C'est à dire :

$$\Phi(\rho=\omega) = \frac{\Phi_0}{e^2} \quad (7.5)$$

En conclusion,  $\omega$  peut être défini comme le rayon du cercle perpendiculaire et centré sur l'axe optique oz où le flux est diminué d'un facteur  $e^2$  par rapport au flux  $\Phi_0$  détecté sur oz.

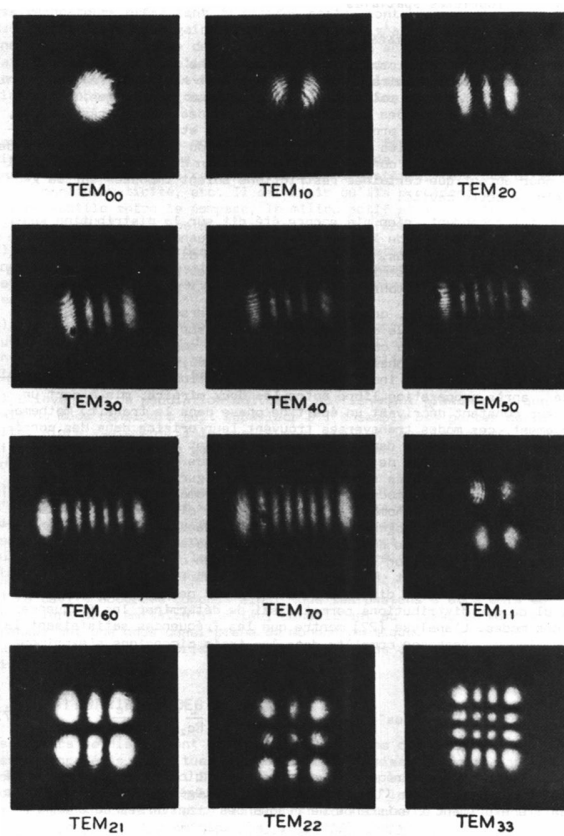
---

<sup>1</sup>Ceci peut être réalisé car on voit que dans l'équation (6.1),  $\omega$  doit être une distance afin que l'exponentielle ne possède pas d'unité.

Au point de vue expérimental,  $\omega$  peut être obtenu à partir de l'équation (2). En effet, il suffit de balayer  $\rho$  et de mesurer le flux pour chaque  $\rho$  à l'aide d'une photodiode. Ensuite, on trace le graphique de  $\left(\ln\left[\frac{\Phi_0}{\Phi(\rho)}\right]\right)^{1/2}$  en fonction de  $\rho$ . La pente nous donne l'inverse de  $\omega$  à un facteur  $\sqrt{2}$  près.

## 7.2 Annexe B : Modes TEM<sub>nm</sub> :

Ci dessous sont représentés quelques modes transversaux :



### 7.3 Annexe C : Forme générale d'une onde gaussienne :

Expression de l'onde à l'origine <sup>2</sup> des  $z$  :

$$\psi_0(x, y) = A.exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{\omega_0^2}\right) \quad (7.6)$$

A étant l'amplitude sur l'axe optique  $oz$ .

Par l'optique de Fourier, on a :

$$\psi(x, y) = h_F \star \psi_0(x, y) \quad (7.7)$$

$$\hat{\psi}(u, v) = \hat{h}_F(u, v) \cdot \hat{\psi}_0(u, v) \quad (7.8)$$

L'accent circonflexe signifiant que l'on est dans l'espace conjugué de Fourier.  $h_F$  étant la fonction de transfert de Fresnel :

$$\hat{h}_F(u, v) = exp(ikz).exp[-i\pi\lambda z(u^2 + v^2)] \quad (7.9)$$

Après calculs, on obtient :

$$\psi(\rho) = A. \left(\frac{\omega_0}{\omega}\right) .exp[i(kz + \phi)].exp\left\{-\rho^2 \cdot \left[\frac{1}{\omega^2} - \frac{i\pi}{\lambda z(1 + z_R^2/z^2)}\right]\right\} \quad (7.10)$$

Cette dernière équation est la forme la plus complète de l'onde gaussienne.

---

<sup>2</sup>Dans ce cas,  $\omega = \omega_0$ .

## 7.4 Annexe D : Expression de $q$ en fonction de $z_R$ :

Par définition :

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{R} + i\frac{1}{\zeta} = \frac{\zeta + iR}{\zeta R} \quad (7.11)$$

En inversant cette relation :

$$q = \frac{\zeta R}{\zeta + iR} = \frac{\zeta R(\zeta - iR)}{\zeta^2 + R^2} = \frac{R(1 - iR/\zeta)}{1 + R^2/\zeta^2} \quad (7.12)$$

En séparant les parties réelle et imaginaire :

$$Re(q) = \frac{R}{1 + R^2/\zeta^2} = z \cdot \frac{1 + z_R^2/z^2}{1 + R^2/\zeta^2} \quad (7.13)$$

$$Im(q) = -\zeta \frac{R^2/\zeta^2}{1 + R^2/\zeta^2} \quad (7.14)$$

Or en utilisant les définitions, on déduit que :

$$\frac{R}{\zeta} = \frac{z(1 + z_R^2/z^2)}{z_R(1 + z^2/z_R^2)} = \frac{z_R}{z} \quad (7.15)$$

Ce qui implique :

$$Re(q) = z \quad (7.16)$$

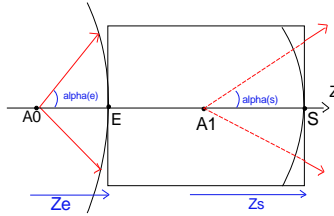
$$Im(q) = -z_R \quad (7.17)$$

C-à-d :

$$q = z - iz_R \quad (7.18)$$

## 7.5 Annexe E : Propagation d'une onde sphérique : Règle *abcd* :

Au point de vue ondulatoire, un instrument optique stigmatique transforme une onde sphérique incidente en une onde sphérique émergente mais de rayon de courbure différent.  
Soient  $A_o$  émettant une onde sphérique et  $A_i$  son image par un système optique.



Soit la matrice de transfert de ce système optique :

$$T(ES) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad (7.19)$$

Du coup, par calcul matriciel, on a :

$$\begin{pmatrix} \underline{x} \\ n\underline{\alpha} \end{pmatrix}_s = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \underline{x} \\ n\underline{\alpha} \end{pmatrix}_e \quad (7.20)$$

Ce qui revient à dire :

$$\underline{x}_s = a\underline{x}_e + b(n\underline{\alpha})_e \quad (7.21)$$

$$(n\underline{x})_s = c\underline{x}_e + d(n\underline{\alpha})_e \quad (7.22)$$

On en déduit :

$$\begin{pmatrix} \underline{x} \\ n\underline{\alpha} \end{pmatrix}_s = \frac{a\underline{x}_e/(n\underline{\alpha})_e + b}{c\underline{x}_e/(n\underline{\alpha})_e + d} \quad (7.23)$$

En définissant  $\overline{R}_e = \left(\frac{x}{\alpha}\right)_e$  et  $\overline{R}_s = \left(\frac{x}{\alpha}\right)_s$ , les rayons de courbure respectifs des deux rayons.

On obtient la règle *abcd* pour les faisceaux sphériques :

$$\frac{\overline{R}_s}{n_s} = \frac{a\overline{R}_e/n_e + b}{c\overline{R}_e/n_e + d} \quad (7.24)$$

## 7.6 Annexe F : Fonction de Bessel :

La fonction de Bessel est définie par :

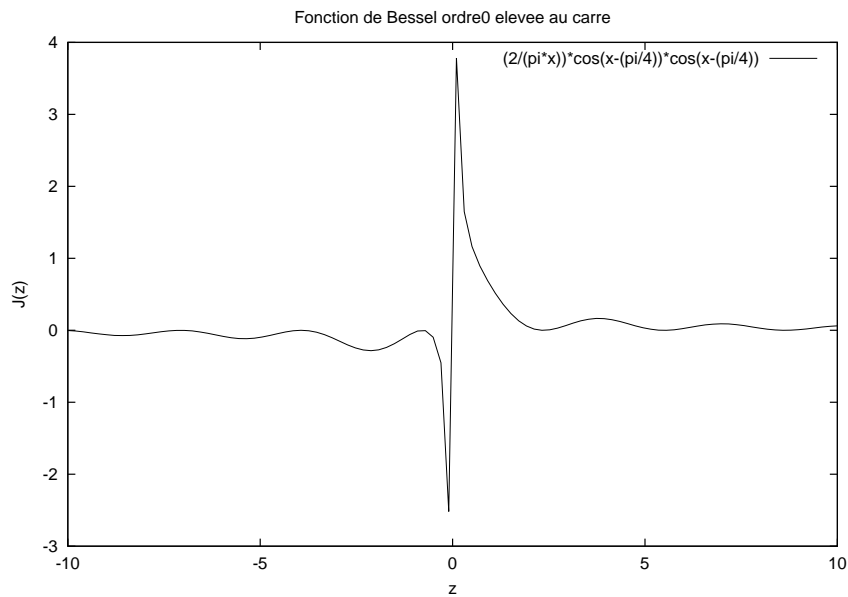
$$J_\nu(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^\nu \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left[ \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(\nu + k + 1)} \cdot \left(\frac{z}{2}\right)^{2k} \right] \quad (7.25)$$

Avec  $\Gamma$ <sup>3</sup> définie par :

$$\Gamma(n) = \int_0^{\infty} e^{-x} \cdot x^{n-1} \cdot dx, \forall n \in ]0, +\infty[. \quad (7.26)$$

Pour l'ordre  $\nu = 0$ , la fonction de Bessel peut se réécrire :

$$J_0^2(z) \approx (2/\pi z) \cdot \text{Cos}^2(z - \pi/4). \quad (7.27)$$




---

<sup>3</sup> $\Gamma$  est appelée aussi *Première intégrale eulérienne*.

## 7.7 Annexe G : Solutions de l'équation d'Helmholtz :

Si on considère une onde monochromatique plane qui a une distribution transversale du flux non uniforme :

$$\psi(\vec{r}) = A(x, y).exp(-i\omega z). \quad (7.28)$$

Cette onde doit satisfaire ce que l'on appelle l'équation d'Helmholtz :

$$\Delta\psi(\vec{r}) + k^2.\psi(\vec{r}) = 0 \quad (7.29)$$

Qui peut se réécrire :

$$\Delta^2 A + k^2.A = 0 \quad (7.30)$$

Cette dernière condition a pour solution :

$$A(x, y) = A_m.J_m(k\rho).exp(im\phi); m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (7.31)$$

Où  $J_m$  est la fonction de Bessel d'ordre  $m$ <sup>4</sup> et  $A_m$  est une constante.

Pour le cas  $m = 0$ , l'onde s'écrit :

$$\psi(\vec{r}) = A_0.J_0(k\rho).exp(-i\omega z). \quad (7.32)$$

Cette onde est dite *faisceau de Bessel*.

Le faisceau de Bessel est une solution *exacte* de l'équation d'Helmholtz.

Tandis que le faisceau gaussien est une solution *approximative* de la même équation.

Cependant, l'amplitude gaussienne est une solution exacte de l'équation *paraxiale* d'Helmholtz :

$$\Delta^2 A - i2k.\frac{\partial A}{\partial z} = 0. \quad (7.33)$$

---

<sup>4</sup>Cfr. Annexe F.

# Chapitre 8

## Bibliographie :

- José-Philippe Pérez, *Optique, Fondements et applications*. 6<sup>ième</sup> édition, Dunod, Paris, 2002.
- Thierry Bastin, *Electrons, Atomes, Molécules : Licences en Sciences Physiques*. Université de Liège, année académique 2001-2002.
- H. Kogelnik and T. Li, *Appl. Opt.*, 5 :1550, 1966.
- BEA.Saleh and MC.Teich, *Fundamentals of photonics*. Wiley-Intersciences, USA, 1991.
- J. Schmets, *Analyse mathématique, introduction au calcul intégral*. Editions Derouaux, Liège, 1994.